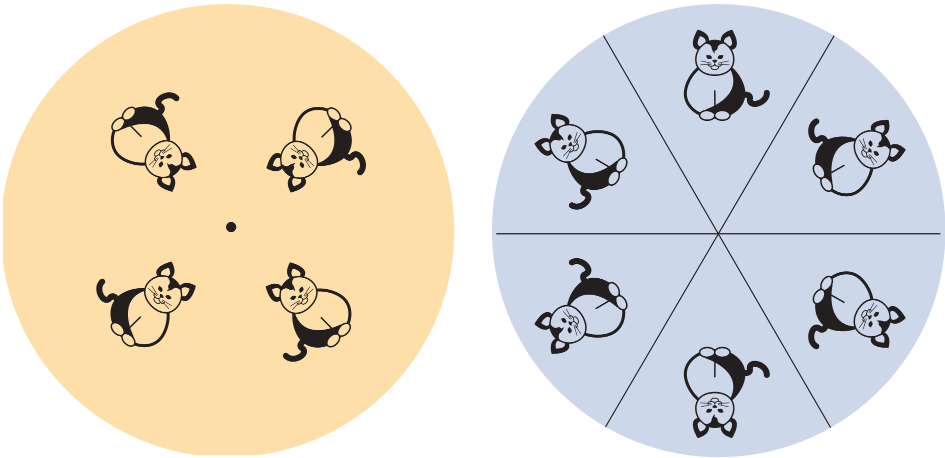
Le ragioni di un fregio

L'esposizione ospitata in questa sala consiste di due settori ben distinti: il primo fa riferimento alla mostra *Simmetria, giochi di specchi* e comprende le sei principali "macchine" che vi erano esposte, il secondo comprende la sezione sulla topologia della mostra *matemilano*. C'è un unico oggetto, nella sala, che non faceva parte né dell'una né dell'altra mostra ed è costituito da due fregi, che, partendo dalla parte della sala che ospita la simmetria, si arrotolano, nella parte della sala che ospita la topologia, fino a formare rispettivamente un cilindro e un nastro di Moebius.

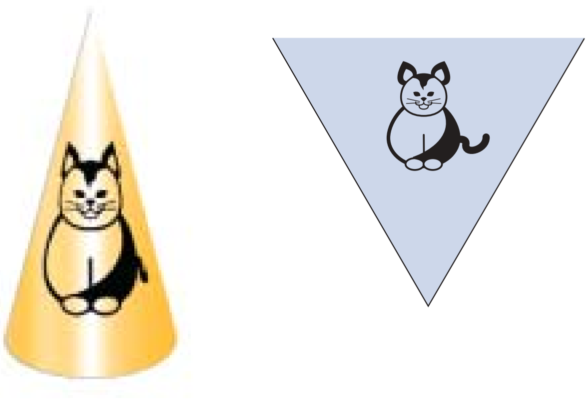
Questa scheda si propone di raccontare perché abbiamo inserito questo oggetto, quasi a evocare un "ponte" fra la simmetria e la topologia. Che un tale ponte esista non è per nulla evidente: il mondo della simmetria è un mondo molto "preciso", un mondo governato da leggi metriche, dove non è affatto irrilevante se una cosa è più lunga o più corta; il mondo della topologia è viceversa un mondo molto "lasco", un mondo dove le lunghezze non hanno più alcuna importanza e di cui molti parlano come di "un mondo di gomma": che rapporto può esserci fra questi due ambienti apparentemente così lontani?
Tuttavia, non appena si va a "scavare" un po' di più, saltano fuori dei legami; come spesso accade (e non solo in matematica!).

Partiamo da un disegno “simmetrico”, del tipo di quelli che si incontrano nella sezione sulla simmetria. Il fatto che il disegno sia simmetrico indica proprio che ci sono varie “operazioni” che possiamo fare senza cambiare il disegno stesso. Ad esempio, se esaminiamo i disegni qui sotto



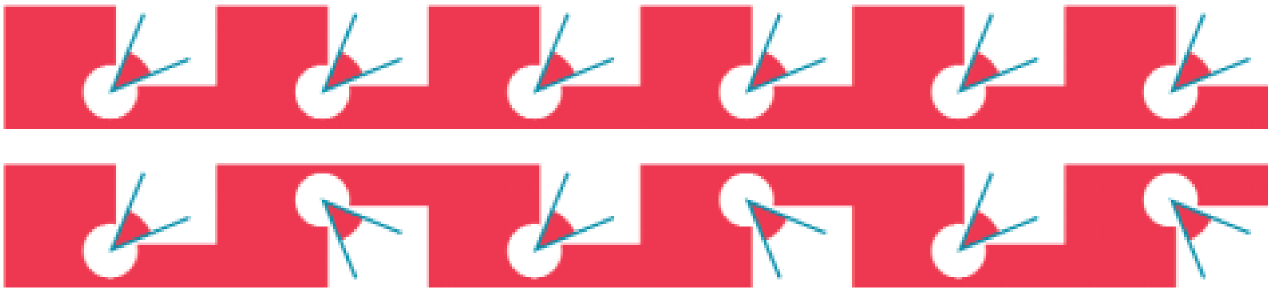
ci accorgiamo che per quello di sinistra le operazioni che lo lasciano invariato sono delle rotazioni di centro il punto segnato e di angolo 90° (oppure 180°, oppure 270°, oppure naturalmente 360°), mentre per quello di destra sono tre rotazioni (di 120°, di 240° e di 360°) e anche tre riflessioni. Si tratta di due disegni diversi rispetto al tipo di simmetria: hanno due diversi gruppi di simmetria.

Immaginiamo adesso di voler cambiare qualcosa nel rosone di destra, per esempio girare la coda del gatto in giù invece che in su; se vogliamo operare questo cambiamento senza però cambiare il tipo di simmetria della figura, allora dovremo girare verso il basso (e nello stesso modo!) tutte le code di tutti i sei gatti. Siamo quindi in una situazione in cui tutte le code di tutti i gatti sono in qualche senso “rappresentate” da una sola (qualsiasi) di esse e un cambiamento su una si ripercuote in un cambiamento su tutte: siamo così vincolati a considerare equivalenti fra loro i punti che differiscono per una simmetria della figura. Senza nemmeno accorgercene, stiamo in un certo senso identificando il tutto (tutte le code di tutti i gatti) con una parte qualsiasi di esso (una coda, scelta a piacere). In modo molto naturale, ci troviamo a fare quello che in matematica si chiama “passaggio al quoziente”.
Che cosa si ottiene con questa operazione? Lo possiamo vedere qui sotto:

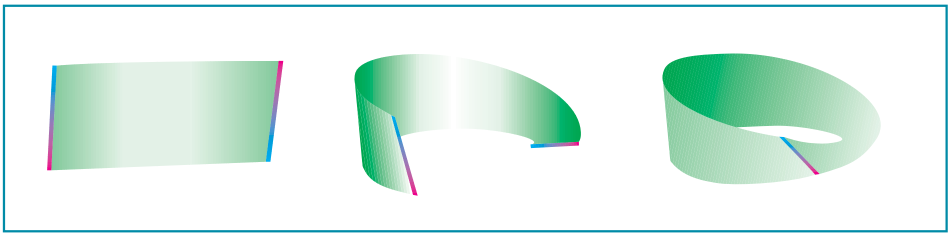


I due oggetti che abbiamo ottenuto “riassumono” in un certo senso l’intera figura, cioè contengono tutte le informazioni che ci permettono di ricostruirla. Se immaginiamo il cono sulla sinistra dotato di una specie di timbro con il disegno di un singolo gatto, e se lo facciamo rotolare sul piano, la traccia lasciata dal timbro è proprio la prima figura.
E se prendiamo il secondo disegno e lo inseriamo fra due specchi che formino tra loro un angolo di 60° (e che siano ortogonali al piano del disegno), quello che vediamo è proprio la seconda figura.

Ma ci possono essere delle situazioni anche più interessanti.
Consideriamo per esempio i due fregi



e immaginiamo di fare la stessa operazione: nel primo caso, dobbiamo arrotolare il fregio in modo da far sovrapporre punti corrispondenti (ovvero punti che differiscono per una delle traslazioni che fissano la figura globale) e otteniamo così un cilindro; nel secondo caso, otteniamo un oggetto più strano che si chiama nastro di Moebius, e che avremo altre occasioni di incontrare nel settore dedicato alla topologia.



Anche in questo caso, gli oggetti che abbiamo ottenuto riassumono tutte le informazioni che ci permettono di ricostruire i due fregi da cui siamo partiti: nel primo caso è facile immaginare un rullo, del tipo dei consueti rulli da pittore, e rendersi conto che, se lo facciamo rotolare sul piano, il disegno sul rullo ricostruisce sul piano il fregio da cui siamo partiti. Nel secondo caso ci vuole un po' più di fantasia per immaginare un "rullo" a forma di nastro di Moebius, ma con qualche esperimento ci si convince che esattamente allo stesso modo il disegno sul nastro può riportare sul piano proprio il fregio da cui si è partiti.
Otteniamo così due oggetti che sono, come si suol dire, "topologicamente diversi": non possiamo passare dal cilindro al nastro di Moebius neanche pensando che siano fatti di gomma e che sia possibile stiracchiarli a piacimento; ed è la topologia di questi oggetti che ci dice (immaginando proprio il rullo che rotola sul piano) in che modo la forma base si ripete a formare la figura globale, cioè ci "detta" il tipo di simmetria della figura.
Consideriamo ad esempio quest'altro fregio:

Se si opera su questo fregio la stessa costruzione, si ottiene ancora un cilindro, ma di dimensioni e proporzioni diverse dal precedente. Dal punto di vista metrico, i due cilindri sono oggetti diversi, ma dal punto di vista topologico sono la stessa cosa; e i fregi che si ottengono usandoli come "rulli" sono due fregi diversi, che però hanno lo stesso tipo di simmetria. Usando invece un nastro di Moebius come rullo si ottiene un diverso tipo di simmetria.

Ecco un ponte fra la simmetria e la topologia!
E molto di più si potrebbe esplorare: sapreste immaginare ad esempio che cosa si ottiene facendo la stessa operazione a partire da un mosaico? Alcune animazioni contenute nella sezione relativa alla topologia del CD di *matemilano*, in particolare quella dal titolo *Dal rettangolo a...*, possono dare qualche idea per rispondere a questa domanda.