Traduzione del libretto di istruzioni:

Getting Started with the Lénárt Sphere™

Construction Materials for Another World of Geometry Key Curriculum Press

Come cominciare ad usare la Sfera di Lénárt

Materiali di costruzione per un nuovo mondo geometrico

Contenuti

Esplorare un nuovo mondo geometrico con la Sfera di Lénárt

Fino ad ora potrete essere venuti in contatto con forme di geometria diverse da quella euclidea solo per qualche nota a piè di pagina, curiosità topologica o divagazione storica. Può darsi che un insegnante una volta vi abbia illustrato le caratteristiche non-euclidee della geometria delle superfici sferiche, utilizzando però solo immagini tratte da pagine 'piatte' di un libro o forme su di uno schermo piatto di un computer.
Probabilmente non avete esplorato la geometria delle superfici sferiche in modo altrettanto approfondito e rigoroso come siete abituati ad esplorare la geometria piana. Probabilmente non avete esplorato la geometria delle superfici sferiche con l'aiuto di strumenti di manipolazione (in ingl. Manipulatives). Forse non avete *mai* esplorato la geometria delle superfici sferiche.
Ma ora avete una Sfera di Lénárt.

Perché utilizzare la Sfera di Lénárt ?

Immaginate di utilizzare, per studiare la geometria piana, solo superfici sferiche, libri rotondi, lavagne curve, e schermi per computer sferici.
(ill.1) Utilizzare solo superfici tradizionali piatte per studiare la geometria delle superfici sferiche disorienta nella stessa maniera. Fortunatamente potete trovare superfici sferiche ovunque. Potete studiare la geometria su palle, arance, palloni e decorazioni per l'albero. Con questi oggetti quotidiani, però, vi trovate di fronte ad un problema di accuratezza. Su una superficie piana potete misurare accuratamente e disegnare forme con un righello (in ingl. Ruler), un goniometro / rapportatore (in ingl. Protractor) ed un compasso. E' difficile però eseguire delle costruzioni e osservazioni accurate sulla superficie di un'arancia.
I materiali per costruire abbinati alla Sfera di Lénárt vi forniscono non solo una superficie sferica liscia sulla quale lavorare, ma anche una serie di strumenti per eseguire costruzioni accurate e formulare congetture molto utili.
Ora avete a disposizione un intero nuovo mondo di geometria da esplorare.

Perché imparare la geometria delle superfici sferiche?
Confronti con la geometria piana

Imparare la geometria delle superfici sferiche permette di considerare concetti già noti della geometria piana da un punto di vista nuovo. Ogni volta che ponete e risolvete un problema in una delle due geometrie, sorge un problema analogo nell'altra. Vedrete che lo stesso problema geometrico potrebbe avere una soluzione diversa in un contesto diverso in cui esiste un insieme di regole differenti.
Lavorare su una superficie diversa da quella piana vi dà l'opportunità di affrontare alcuni dei vostri preconcetti e pregiudizi matematici. Questo è esattamente ciò che fecero Girolamo Saccheri, Johann Lambert, Carl Friedrich Gauss, János Bolyai, Nikolai Lobachevsky, Bernhard Riemann ed altri matematici quando gettarono le basi per la geometria non-euclidea.

Applicazioni della geometria delle superfici sferiche

La geometria delle superfici sferiche viene utilizzata da molte persone in molti ambiti diversi. I piloti aerei pianificano rotte intorno ad un mondo sferico, i chimici scoprono molecole che possono essere modellate su una sfera, gli artisti dipingono figure sferiche, e i fisici studiano un intero universo che alcuni ritengono sia curvo.
La geometria delle superfici sferiche viene anche utilizzata molto in altri ambiti della matematica. Molti concetti della matematica superiore si collegano ai concetti della geometria delle superfici sferiche.

Imparare a conoscere i sistemi assiomatici

La seconda frase della Dichiarazione d'Indipendenza degli Stati Uniti inizia così: "Riteniamo che queste verità siano lapalissiane…" e continua con una lista di quelli che gli autori definiscono i diritti umani fondamentali.Quasi tutti i sistemi di pensiero basano le proprie idee su un insieme fondamentale di convinzioni, o assiomi. Un sistema di pensiero è coerente con i suoi assiomi, e i teoremi dedotti da questi assiomi non si contraddicono l'un l'altro.
La matematica stessa è un sistema di pensiero che ha attraversato un cambiamento radicale negli ultimi due secoli. Partendo da una scienza che si basava su pochi sistemi assiomatici fissi, crescendo si è trasformata in una scienza che si avvale di una moltitudine di sistemi assiomatici. Non esistono più rigide frontiere fra i diversi rami della matematica, ed esistono ora aree più ampie di applicazione all'interno ed all'esterno del campo della matematica.
Troverete che molte nozioni familiari della geometria piana non possono essere applicate direttamente alla sfera. Per questa ragione, i sistemi assiomatici costruiti sulla base delle caratteristiche della sfera possono essere molto diversi da quelli costruiti in base alle proprietà della superficie piana. Lavorare sulla Sfera di Lénárt vi aiuterà a sviluppare una comprensione di quello che è un sistema assiomatico e di come più sistemi assiomatici possono coesistere allo stesso momento.

Comprendere il pensiero degli altri

Il tipo di pensiero utilizzato in matematica è parte integrante del pensiero umano. Le persone che imparano a meditare sui problemi matematici e ad accettare approcci diversi nella geometria, più facilmente applicano questo modo di pensare ad altri ambiti della vita.
Addentrarsi nella geometria delle superfici sferiche vi incoraggia a confrontare le vostre idee con quelle di altri, a ragionare e ad argomentare in maniera costruttiva e a guardare a coloro che hanno punti di vista diversi dai vostri come ad alleati per scoprire la verità.
Imparare la geometria delle superfici sferiche di pari passo con la geometria piana può aiutare i singoli a sviluppare una comprensione delle persone con un background diverso dal punto di vista culturale, tradizionale o sociale. Lavorare con sistemi assiomatici diversi aiuta anche ad affrontare meglio un mondo diversificato e multiculturale e porta ad una comprensione più chiara di come tutti gli assiomi umani siano relativi. La nostra speranza è che questi studi sulla sfera possano migliorare la tolleranza e la comunicazione fra tutti noi che viviamo su questo globo.

Come iniziare con la sfera di Lénárt

Tutto ciò di cui avete bisogno per iniziare ad esplorare il mondo matematico della sfera è contenuto all'interno di questo Kit Base della Sfera di Lénárt. Vi consigliamo di continuare a leggere e immergervi nell'argomento. Avete il nostro permesso di copiare pagine da questo libretto da utilizzare nella vostra classe se questo è più comodo per voi.

Ill. 1 Probabilmente il testo che utilizzate per studiare la geometria piana può essere usato con successo anche per la Sfera di Lénárt. La maggior parte delle attività di studio contenute nei libri di testo di geometria possono essere trasferite direttamente alla sfera, spesso con risultati sorprendenti.

Se volete un programma (in ingl. Curriculum) approfondito già pronto per la geometria delle superfici sferiche, la Key Curriculum Press pubblica *Non-Euclidean Adventures on the Lénárt Sphere* (Avventure non-euclidee sulla Sfera di Lénárt), una collezione di 43 esercizi particolari (in ingl. blackline activity masters) completi di "carte-avventura", guide all'avventura per gli studenti, guide all'avventura per gli insegnanti, una visione d'insieme filosofica del materiale, suggerimenti per utilizzare la Sfera di Lénárt in classe e una tabella di correlazione al programma (in ingl. Curriculum correlation chart).

Esercizi particolari

Per cominciare: viaggiare su una sfera

Conoscete già bene molte proprietà di base della geometria piana. I problemi e le attività di questa sezione si propongono di farvi conoscere alcune proprietà di base della geometria delle superfici sferiche. Potete riflettere su queste attività da soli, discuterne con altri, scrivere le vostre risposte, e confrontarle con quelle di compagni di classe, amici e colleghi.
Per completare le attività avrete bisogno di alcune cose non incluse nel vostro kit della Sfera di Lénárt: acqua da far gocciolare, un panno umido o un asciugamano di carta per pulire la sfera, un pezzo di spago o un elastico ed una sfera, acquistata o costruita con la vostra sfera di Lénárt.

Iniziate i vostri percorsi sulla sfera di Lénárt risolvendo un vecchio indovinello. Esaminate a fondo l'indovinello disegnando diagrammi sulla vostra sfera con pennarelli non indelebili.

1. Un orso vagante lascia la tana e percorre 100 km verso sud. Dopo una pausa si gira verso ovest e cammina dritto per 100 km. Poi si gira ancora e cammina verso nord, e si stupisce di ritrovarsi a casa. Di che colore è l'orso? ill.1

Se l'orso sta camminando verso sud su una sfera, sta camminando in linea retta? Una delle forme più semplici su una superficie piana è una linea retta. Come appare una linea retta su una sfera? Le prossime attività vi aiuteranno a decidere. Usate la vostra sfera ed i pennarelli per spiegare le vostre conclusioni. Ricordate, potete cancellare le costruzioni sulla sfera con un panno umido o con un asciugamano di carta.

2. Immaginate di uscire di casa una mattina e di cominciare a muovervi in modo rettilineo. Qualsiasi cosa ostruisca il vostro cammino, trovate il modo di mantenere la vostra direzione. Viaggiate molto a lungo. Descrivete il percorso del vostro viaggio. Dove arriverete? ill.2

Un **cerchio massimo** è un cerchio su una sfera che divide la sfera in due parti uguali.
Ill.3 Se la terra fosse una sfera regolare (in ingl. exact), l'equatore sarebbe un cerchio massimo.

3. Disegnate due punti sulla vostra sfera. Usate un pezzo di spago teso o un pezzo di elastico per trovare il percorso più breve fra i punti. Tracciate il percorso con un pennarello. Cosa succederebbe se doveste estendere questo percorso? ill.4
4. Esaminate il righello (in ingl. Ruler) per superfici sferiche allegato alla vostra Sfera di Lénárt. Ha molti lati diversi.
   Decidete quali lati potete utilizzare per tracciare archi di cerchi massimi.
5. Potete misurare l'arco di un cerchio in gradi. Il vostro righello (in ingl. Ruler) per superfici sferiche misura la distanza lungo un cerchio massimo in gradi. Segnate due punti sulla vostra sfera e misurate la distanza fra di essi.
6. Fate una lista delle analogie e differenze fra i cerchi massimi su una sfera e le linee rette su un piano.

7. a. Fate sgocciolare da un contagocce alcune gocce d'acqua
su una superficie piana inclinata e lasciate che le gocce colino lungo ill.1
la superficie. Descrivete il percorso dell'acqua.

   b. Fate cadere alcune gocce d'acqua sulla sommità della vostra Sfera di
Lénárt e lasciate che le gocce colino lungo la superficie. Osservate e ill.2
descrivete il percorso dell'acqua.

8. I piloti hanno la necessità di conoscere a fondo la geometria delle superfici sferiche per poter regolare la rotta. Immaginate di pilotare un aereo che decolla a San Francisco e vola direttamente fino a Mosca.

   a. Posizionate un righello (in ingl. Ruler) sulla mappa piana illustrata qui sotto, in modo che colleghi Mosca con San Francisco. Indicate alcuni luoghi su cui volereste, se questo fosse il vostro percorso di volo.

Ill. 3 (mappa)

3000 Km
3000 Mi.
Distanze all'equatore

Proiezione di Mercatore

   b. Trovate un globo in commercio o createne uno con il poster *Terra Vivente* incluso nel vostro kit della Sfera Lénárt. (Per costruire una sfera occorrerà un po' di tempo.) Trovate la posizione di Mosca e San Francisco sul vostro globo. Se state lavorando sul vostro globo *Terra Vivente* (in ingl. Living Earth), usate il vostro regolo / riga di controllo (in ingl. Straightedge) sferico ed un pennarello per tracciare la rotta di volo più breve fra questi due punti. Se state lavorando su un globo acquistato, utilizzate un pezzo di spago teso o un pezzo di elastico per tracciare la rotta di volo più breve fra questi due punti. Indicate alcuni luoghi su cui volereste, se questo fosse il vostro percorso di volo.

   c. Confrontate le due rotte. Quale scegliereste, se foste il pilota?

9. Ora immaginate di essere al Polo Nord e di dover volare al Polo Sud. Che rotta scegliereste per essere certi di percorrere la via più breve?

10. Pensate di nuovo al lungo percorso lineare che iniziò dalla vostra porta di casa. Sarebbe un viaggio solitario senza compagnia, quindi avete deciso di portare un amico. Voi ed il vostro amico camminate fianco a fianco, in modo da poter conversare più facilmente. Spiegate perchè è impossibile che tutt'e due percorriate un tragitto diritto per l'intero viaggio. ill.1

11. Immaginate che un paio di binari ferroviari si estendano tutt'intorno alla terra. Decidete se i binari potrebbero rappresentare linee parallele. ill.2

Riassumendo i vostri viaggi: rivisitazioni di alcune proprietà di base

Questo è il momento buono per fermarsi e riassumere alcune delle scoperte che avete fatto fin'ora. Utilizzate una tabella come quella qui sotto per segnare i vostri pensieri e per confrontare la geometria su di un piano con la geometria sulla sfera.

	Su di un piano	**Sulla sfera**
Una linea		
Il percorso più breve che unisce due punti		
Estendere una linea all'infinito		
Le parti in cui due punti dividono una linea		
Il numero di linee che passano attraverso due punti diversi (qualsiasi)		
Il numero di linee parallele ad una linea data che passa attraverso un punto che non si trova sulla linea data		

Per cominciare: una costruzione sulla sfera

Avete imparato che alcune proprietà di base della geometria delle superfici piane non sono valide su di una sfera. E che dire delle idee geometriche più complesse che dipendono da queste proprietà? Come potete immaginare, nel momento in cui cambiano le proprietà di base, il resto della geometria subisce cambiamenti fondamentali.

Le due costruzioni in questa sezione vi daranno la possibilità di esplorare alcune differenze essenziali fra la geometria piana e la geometria delle superfici sferiche. Strada facendo, conoscerete tutti gli strumenti per la costruzione su superfici sferiche. Per le costruzioni su un piano, vi occorreranno carta e gli strumenti di costruzione per superfici piane già noti – un righello (in ingl. Ruler), un goniometro ed un compasso – o un software con strumenti di costruzione come il *The Geometer's Sketchpad* ®. Per lavorare sulla Sfera di Lénárt vi occorreranno anche un panno umido o un asciugamano di carta per pulire la sfera.

Costruzione su un piano

Un foglio di carta o uno schermo di computer possono rappresentare un piano infinito. Con l'aiuto di uno di questi e di alcuni strumenti da disegno per superfici piane seguite le cinque fasi elencate qui di seguito.

Fase 1
Disegnate un punto *O*. Utilizzate quindi un goniometro per tracciare tre raggi che partono dal punto *O* e che formano tre angoli, ognuno dei quali misura 120°.

Fase 2
Utilizzate il compasso per disegnare un cerchio che abbia come centro il punto *O*. Segnate i punti in cui il cerchio interseca i tre raggi. Collegate questi 3 punti di intersezione utilizzando un righello (in ingl. Straightedge) per formare un triangolo equilatero.

Fase 3
Disegnate altri tre cerchi con il centro *O,* utilizzando raggi diversi. Utilizzate la misura di raggi che preferite. Per ogni cerchio, trovate i punti di intersezione con i tre raggi e collegateli per formare un triangolo equilatero.

ill.1

ill.2

Costruzione sulla sfera

Seguite le fasi indicate qui di seguito per realizzare una costruzione sferica equivalente sulla vostra sfera di Lénárt. (Vedere "Come utilizzare gli strumenti per costruire della Sfera di Lénárt", pag. da 8 a 11, per le istruzioni su come utilizzare gli strumenti per costruire sulla sfera.)

Fase 1
Disegnate un punto *O*. Utilizzate quindi il vostro righello (in ingl. Ruler) per superfici sferiche come un goniometro per tracciare tre archi di cerchi massimi che partono dal punto *O* e che creano tre angoli, ognuno dei quali misura 120°.

Fase 2
Utilizzate il vostro compasso per superfici sferiche per disegnare un cerchio che abbia come centro il punto *O*. Segnate i punti in cui il cerchio interseca i tre archi. Collegate questi 3 punti di intersezione utilizzando il vostro righello (in inglese Straightedge) per superfici sferiche per formare un triangolo equilatero.

Fase 3
Disegnate altri tre cerchi con il centro *O*, utilizzando i raggi 30°, 60° e 90°. Per ogni cerchio, trovate i punti di intersezione con i tre archi e collegateli utilizzando il vostro righello (in ingl. Straightedge) per superfici sferiche per formare un triangolo equilatero.

Fase 4

Misurate i lati di tutti i vostri triangoli equilateri con un righello(in ingl. Ruler). Contrassegnate ogni lato con la sua lunghezza.

Fase 5

Misurate gli angoli di tutti i vostri triangoli equilateri con un goniometro. Contrassegnate ogni angolo con il suo valore.

Fase 4

Misurate i lati di tutti i vostri triangoli equilateri con il vostro righello (in ingl. Ruler) per superfici sferiche. Contrassegnate ogni lato con la sua lunghezza.

Fase 5

Misurate gli angoli di tutti i vostri triangoli equilateri con un goniometro per superfici sferiche. Contrassegnate ogni angolo con il suo valore.

Riflessioni sulle vostre costruzioni: rivisitazioni di alcune idee di base

Utilizzate le costruzioni appena create per aiutarvi a rispondere ai quesiti posti. Fate attenzione perché su alcuni di questi quesiti sarà necessario riflettere per alcuni giorni!

1. Qual è la somma delle misure degli angoli di un triangolo?

2. I triangoli equilateri sono sempre simili? (Ricordate, i poligoni sono simili se i loro lati corrispondenti sono proporzionali e se i loro angoli corrispondenti sono congruenti.)

3. Qual è la relazione fra gli angoli di un triangolo e la sua misura?

4. Esiste un cerchio più grande?

5. Esiste un triangolo più grande?

6. Possono due linee essere parallele?

7. Se dimezzate il diametro di un cerchio, come modificate la sua circonferenza?

8. E’ possibile che un cerchio diventi così grande da essere una linea?

Gli strumenti da utilizzare sulla Sfera di Lénárt
Gli strumenti da utilizzare sulla Sfera di Lénárt corrispondono agli strumenti tradizionali per disegnare e misurare utilizzati per studiare la geometria piana.

Strumenti per la geometria su di un piano	Strumenti per la geometria sulla sfera
Si disegna e si scrive su una **superficie piatta** o su di uno **schermo piatto di un computer**.	Si disegna e si scrive sulla **Sfera di Lénárt** o su **lucidi emisferici** appoggiati sulla sfera.
Si utilizza un **regolo** (in ingl. Straightedge) per tracciare righe dritte, segmenti di linee e raggi.	Si utilizza un **regolo** (in ingl. Straightedge) **per superfici sferiche** per disegnare cerchi massimi e archi di cerchi massimi.
Si utilizza un **righello** (in inglese Ruler) per misurare segmenti di linee.	Si utilizza un **righello per superfici sferiche** (in inglese Ruler) per misurare cerchi massimi e archi di cerchi massimi.
Si utilizza un **goniometro** (protractor) per misurare gli angoli.	Si utilizza un righello (in ingl. Ruler) per superfici sferiche come **goniometro** (in ingl. Protractor) **per superfici sferiche** per misurare gli agoli.
Si utilizza un **compasso** per disegnare cerchi.	Si utilizza un **compasso per superfici sferiche** ed un **localizzatore del centro** (in ingl. Center locator) per disegnare cerchi.
Se si utilizza una **matita**, si può cancellare il lavoro eseguito con una gomma.	Se si utilizza un **pennarello non indelebile**, si può cancellare il lavoro eseguito con un panno umido o un asciugamano di carta.

Sfera
Il vostro Kit Base di materiali per costruire della Sfera di Lénárt contiene una sfera di plastica trasparente. Per studiare la geometria delle superfici sferiche utilizzerete questa superficie. Potete disegnare direttamente sulla sfera o sui lucidi emisferici che si appoggiano sulla sfera con pennarelli non indelebili. (ill.1)
Se non state utilizzando la sfera, appoggiatela sempre sul toro/supporto (in ingl. Torus) o sul righello (in ingl. Ruler) per superfici sferiche. *Per evitare rotture, non lanciate né lasciate mai cadere la vostra sfera.*

Toro / Supporto
Il vostro kit contiene anche un toro/supporto, o superficie a forma di ciambella. Il toro/supporto serve come base per la sfera e può essere utilizzato anche come un'ulteriore superficie interessante sulla quale fare degli esperimenti.

Lucidi
Ogni kit della Sfera di Lénárt contiene quattro lucidi emisferici che si appoggiano sulla sfera. Questi lucidi rappresentano la "carta" per il vostro "tavolo" sferico. (ill.2)
Potete disegnare su questi lucidi con pennarelli non indelebili e cancellare i vostri disegni con un panno umido o con un asciugamano di carta.

Potete ritagliare varie forme dai lucidi con le forbici, e unire due lucidi emisferici con una speciale corona pendente per creare una sfera sospesa. (ill.1)
Se desiderate disegnare su un disegno di fondo che volete conservare per un utilizzo futuro, potete fare il disegno di base sulla sfera stessa ed utilizzare i lucidi per eseguire il lavoro supplementare. Alternativamente potete tracciare il disegno di fondo su di un lucido con un pennarello indelebile, poi utilizzare pennarelli non indelebili per eseguire il lavoro aggiuntivo.
I lucidi ed i pennarelli sono gli unici componenti "di consumo" nel kit della Sfera di Lénárt. Per ambedue gli articoli sono disponibili ricambi presso la Key Curriculum Press.

Corone pendenti (ill.2)

Ogni kit della Sfera di Lénárt contiene un cerchio di plastica o corona pendente.
Potete unire due lucidi con una corona pendente per creare una sfera sospesa.
Le decorazioni a mosaico creano costruzioni particolarmente decorative da appendere nella vostra aula.
Per appendere due lucidi con la corona pendente, fate un nodo vicino all'estremità di un pezzo di spago e infilate lo spago attraverso il piccolo foro della corona pendente o attraverso uno dei lucidi. I bordi della corona pendente sono tutti smussati, in modo da poter inserire un lucido su ogni lato. (ill.3)
Unite i due lucidi posizionando un lucido sul toro/supporto e montando la corona pendente sul bordo. Sistemate quindi sopra il secondo lucido.
(Se necessario, potete usare due piccoli pezzi di nastro adesivo trasparente per assicurarvi che gli elementi della sfera pendente non si separino.)

Regolo (in ingl.Straightedge), righello (in ingl. ruler) e goniometro (in ingl. Protractor) per superfici sferiche

Utilizzate il vostro regolo (straghtedge) o righello (ruler) per superfici sferiche per disegnare e misurare i cerchi massimi della sfera e gli archi dei cerchi massimi.
Questo strumento di costruzione serve anche come goniometro per misurare gli angoli sulla sfera.
Il righello per superfici sferiche ha tre "piedi" che gli permettono di stare in piedi su un tavolo e di sostenere la sfera. Posizionando la sfera sul righello, è facile disegnare un cerchio massimo. I due lati graduati tracciano archi di cerchi massimi, (ill.4) gli altri lati no. Per misurare distanze con il righello per superfici sferiche, allineate l'arco che state misurando con uno di questi lati graduati. Le marcature sul righello indicano gradi, che si utilizzano per misurare le distanze sulla sfera. (Quando il righello per superfici sferiche è appoggiato sui suoi "piedi" e la sfera è appoggiata sopra, il cerchio massimo lungo il suo lato graduato ha la stessa inclinazione dell'equatore della terra rispetto al sole.

(ill.5)

Esistono vari modi per utilizzare il righello (ruler) per superfici sferiche come goniometro per misurare o disegnare angoli sferici. Il modo più semplice, ma anche meno accurato, è quello di utilizzare il mini-goniometro, suddiviso per 30°, sulla parte (ill.1)
alta del lato rigato più corto. Potete scegliere un altro metodo, che è più tedioso ma più preciso. Posizionate il punto medio (in ingl. Midpoint) del lato rigato più corto sul vertice dell'angolo. Allineate quindi un lato dell'angolo con questo lato rigato. Contate i gradi lungo il cerchio massimo (lato rigato più lungo) e fra i due lati dell'angolo. Forse dovrete estendere i due lati dell'angolo in modo che intersechino il cerchio massimo.
Utilizzate ambedue i lati rigati per costruire angoli retti con il righello sferico.
Finite l'angolo dell'angolo retto estendendo uno dei due lati.
Potete costruire un goniometro più piccolo da un pezzo circolare di lucido. Le istruzioni per costruire questo goniometro si trovano in *Avventure non-euclidee sulla sfera di Lénárt* (*Non-Euclidean Adventures on the Lénárt Spere*), di István Lénárt, Avventura 1.5, disponibile presso la Key Curriculum Press. Questo goniometro può essere molto utile, specialmente per misurare angoli in costruzioni più piccole.

Compasso per superfici sferiche e localizzatore del centro
Il vostro kit per costruire contiene un compasso per superfici sferiche ed un localizzatore del centro per disegnare cerchi sulla sfera e sui lucidi. Il localizzatore del centro ha un buco al suo centro per fissare la posizione della punta del compasso. Per disegnare un cerchio sferico, segnate prima il centro sulla sfera. Posizionate la sfera sul toro/supporto in modo che il segno del centro del vostro cerchio (ill.2)
si trovi in cima alla sfera. Posizionate il localizzatore del centro sulla sfera in modo che il segno del centro sia visibile attraverso il foro. Utilizzate quindi il compasso per superfici sferiche come usereste la sua controparte per superfici piane.
Tenete semplicemente la sua estremità scanalata fra pollice e indice e fatelo girare lentamente.
Il compasso per superfici sferiche non misura i gradi in modo così accurato come il righello.
Per costruzioni in cui l'accuratezza è importante utilizzate quindi il righello per verificare il posizionamento (in ingl. Setting) del compasso. *(Attenzione: assicuratevi che l'inchiostro dei pennarelli indelebili sia asciutto prima di venire a contatto con il localizzatore del centro.)*

Pennarelli non indelebili e collari per bloccare i pennarelli
Il vostro kit contiene quattro pennarelli non indelebili (rosso, blu, verde e nero) per disegnare sulla sfera, sul toro/supporto e sui lucidi. Utilizzate l'acqua per cancellare da queste superfici, esattamente come fareste per un lucido per lavagne luminose.
Potete usare uno spruzzatore e asciugamani di carta, o tenere a portata di mano un panno umido.
Occasionalmente, vorrete utilizzare pennarelli per lucidi non indelebili per conservare una costruzione particolarmente bella o importante su un lucido. Utilizzate alcol (ill.3)
(in ingl. Rubbing alcohol; alcol per frizioni?) su un fazzoletto o asciugamano di carta per cancellare i pennarelli indelebili. *(Scrivete sulla sfera solo con pennarelli indelebili da utilizzare specificatamente su lucidi per lavagne luminose. L'inchiostro di pennarelli cancellabile a secco ("dry erase"), ad esempio, non può essere rimosso dalla sfera.)* (ill.4)
I quattro collari inclusi nel vostro kit sono stati studiati per tenere ben saldi nel cilindro del compasso i pennarelli Vis-à-Vis® e Stabilo®-OH. Premete semplicemente il collare appropriato nel cilindro dell'arco del compasso fino a che si incastra con uno scatto. Poi spingete il pennarello nel collare fino in fondo. *Per evitare che i pennarelli si secchino, togliete sempre il pennarello dal collare e chiudetelo quando non lo state utilizzando.* (ill.5)

La seguente tabella vi mostra quale collare usare per i vari tipi di pennarelli Vis-à-Vis e Stabilo-OH.

Tipo di pennarello	**Identificazione del collare**	**Colore del collare**
Vis-à-vis cancellatura a umido punta fine (non indelebile)	V - WF	Azzurro
Vis-à-vis cancellatura a umido punta extra fine (non indelebile) Vis-à-vis punta extra fine indelebile	V-XF	Trasparente
Vis-à-vis punta fine indelebile	V – PF	Bianco
Stabilo-OH solubile in acqua punta media (non indelebile) Stabilo-OH solubile in acqua punta fine (non indelebile) Stabilo-OH punta media indelebile Stabilo-OH punta fine indelebile	S – OH N.B. ATTENZIONE: INSERIRE MEZZELUNE IN QUESTA COLONNA	Rosso

Per lavorare con altre marche di pennarelli, utilizzate un pezzo di spago invece del collare. Attorcigliate semplicemente lo spago intorno al pennarello fino a che si adatta bene al cilindro vuoto dell'arco del compasso. Lo spago dovrebbe evitare che il pennarello si muova o che cada fuori dal cilindro.

Il poster ed il globo Terra Vivente

Il poster *La Terra Vivente sulla Sfera di Lénárt* include proiezioni policoniche degli emisferi nord e sud della terra. Potete appendere il poster ed esporlo come una mappa piatta, oppure potete ritagliare le proiezioni policoniche e creare una mappa sferica da esporre come un globo sulla vostra Sfera di Lénárt. Le istruzioni per creare il globo sono stampate sul poster. ill.1

Contenitore per riporre la sfera

La scatola a forma di cubo in cui il kit della Sfera di Lénárt era imballato si utilizza anche come contenitore per riporlo. Rimuovete semplicemente il pezzo di cartone protettivo staccato posto intorno alla sfera per il trasporto, e la scatola conterrà facilmente un kit completo di materiali. Per evitare di perderli, dovreste riporre eventuali altri lucidi (inframmezzati da distanziatori di gommapiuma), le corone pendenti ed i collari separati dal resto del kit. ill.2

Materiali per la Sfera di Lénárt e parti di ricambio

Per ordinare altri materiali per la Sfera di Lénárt (inclusi lucidi, corone pendenti, poster e pennarelli) o parti di ricambio chiamate la Key Curriculum Press al 1-800-995-MATH (per il Nordamerica, altrimenti telefonate al 510-595-7000) o scrivete alla Key Curriculum Press, 1150 65th Street, Emeryville, CA 94608, USA.

Risposte ai problemi iniziali

Per cominciare: viaggiare su una sfera

1. L'orso è bianco perché vive al Polo Nord, e deve quindi essere un orso polare. Il suo percorso sulla sfera descrive una forma sferica a tre lati. Ognuno di questi lati è un arco di un cerchio massimo, perché "camminare verso sud" e "camminare verso nord" può significare solo camminare lungo longitudini della terra, quindi lungo cerchi massimi. "Gira verso ovest e cammina dritto" significa che cammina lungo un'altra linea retta sferica, e cioè un cerchio massimo. Se avessimo detto "continua a caminare verso ovest", allora camminerebbe lungo una latitudine della terra, quindi lungo un cerchio più piccolo.
2. Il vostro cammino seguirà un cerchio il cui centro è anche il centro della terra. Un cerchio di questo tipo viene definito cerchio massimo. Alla fine vi ritroverete a casa.
3. Il percorso è un arco di un cerchio massimo. Se lo estendete, traccerete un cerchio massimo per intero. Percorsi lungo cerchi massimi e linee rette rappresentano la via più breve tra due punti. Sono i percorsi più diretti possibili sulle rispettive superfici.
4. I lati di un righello per superfici sferiche che tracciano archi di cerchi massimi riportano le indicazioni utili alle misurazioni. I lati non graduati tracciano archi di cerchi più piccoli.
5. Le risposte variano a secondo dell'ubicazione dei punti. La distanza fra due punti sulla sfera non può essere più di 180°.
6. La lunghezza dei cerchi massimi è finita, mentre le linee rette hanno un lunghezza infinita. Un cerchio massimo divide la sfera in due sezioni finite e congruenti, mentre una linea retta divide il piano in due sezioni infinite. Sia i cerchi massimi che le linee rette collegano i punti tramite il più breve percorso possibile, e ambedue le forme tracciano il percorso più diretto possibile in una qualsiasi direzione.
7. a. Se tutto va bene, l'acqua traccerà il percorso di una linea retta.
   b. L'acqua dovrebbe tracciare l'arco di un cerchio massimo.
8. a. L'aeroplano volerebbe sopra la parte occidentale e centrale degli Stati Uniti, il Canada orientale, l'Atlantico, l'Inghilterra, la Germania settentrionale o la Danimarca, il Mar Baltico e la Russia.
   b. La rotta più breve è la rotta polare. L'aeroplano sorvolerebbe la parte nord-occidentale degli Stati Uniti, il Canada occidentale, l'Artico Canadese, la Groenlandia, la Scandinavia e la Russia.
   c. La rotta più breve è quella che si trova utilizzando un cerchio massimo su una sfera.
9. Esiste un numero infinito di cerchi massimi che passano attraverso una qualsiasi coppia di punti polari, quindi esiste un numero infinito di rotte fra le quali scegliere, che sono ugualmente corte. Potete scegliere una qualsiasi di queste.
10. Se sia voi che il vostro amico state viaggiando su percorsi diretti, i vostri percorsi devono seguire dei cerchi massimi. I cerchi massimi su una sfera si intersecano sempre. Quindi o voi ed il vostro amico alla fine vi incontrate, o iniziate a camminare sugli stessi passi, o uno di voi (oppure ambedue) seguirà un percorso di un cerchio che è più piccolo di un cerchio massimo.
11. Presumibilmente, i due sentieri non si intersecano mai. Dato che qualsiasi paio di cerchi massimi si interseca, ne segue che questi due sentieri non possono trovarsi su cerchi massimi. I sentieri non possono perciò rappresentare linee parallele (cerchi massimi) sulla sfera.

Riassumendo i vostri viaggi: rivisitazioni di alcune proprietà di base

	Su di un piano	**Sulla sfera**
Una linea	Una linea retta	Un cerchio massimo
Il percorso più breve che unisce due punti	Il percorso più breve che collega due punti è il segmento di una linea retta.	Il percorso più breve che collega due punti è l'arco di un cerchio massimo.
Estendere una linea all'infinito	Potete farlo su un piano. Siccome il piano si estende indefinitamente, potete estendere una linea retta all'infinito.	Non potete farlo sulla sfera. Una linea su una sfera è un cerchio massimo, che si rincontra ed ha una lunghezza finita.
Le parti in cui due punti dividono una linea	N.B. A PAG. 5 QUESTA RIGA E' PRESENTE, QUI, A PAG. 11, MANCA, ANCHE SE QUESTA DOVREBBE ESSERE LA SOLUZIONE DELLA TABELLA DI PAG. 5	
Il numero di linee che passano attraverso due punti diversi	Esattamente una linea retta attraversa una coppia di punti sul piano.	Esattamente un cerchio massimo attraversa una qualsiasi coppia di punti sulla sfera a meno che siano punti opposti, o **punti polari**. In questo caso esiste un numero infinito di cerchi massimi che passa attraverso questi due punti.
Il numero di linee parallele ad una linea data che passa attraverso un punto che non si trova sulla linea data	Il postulato di Euclide delle parallele afferma che esiste esattamente una retta di questo tipo su di un piano.	Il postulato delle parallele non è valido sulla sfera. Sulla sfera non esistono cerchi massimi paralleli. Una versione del postulato per la sfera potrebbe affermare questo: Dato un cerchio massimo ed un punto che non si trova sul cerchio massimo, non esiste un cerchio massimo attraverso il punto che sia parallelo al cerchio massimo dato.

(N.B. QUI CONTINUA PAG. 13)

Per cominciare: una costruzione sulla sfera

Su di un piano, la vostra costruzione dovrebbe produrre una serie di cerchi concentrici con un insieme corrispondente di triangoli equilateri ed equiangolari. Ogni triangolo ha tre angoli, ognuno dei quali misura 60°. La lunghezza del lato di ogni triangolo dipende dal raggio del cerchio circoscritto da ciascun triangolo.
Anche la costruzione sulla sfera produce una serie di cerchi concentrici. Il cerchio più ampio, con un raggio che misura 90°, è un cerchio massimo. Una delle prime sorprese in questa costruzione è che tutti i vertici ed i lati del triangolo inscritto in questo cerchio più ampio si trovano sul cerchio massimo stesso. Ognuno dei triangoli inscritti è equilatero ed equiangolare. Ogni triangolo differisce però dagli altri per quanto riguarda la misura degli angoli. Le misurazioni del cerchio creato nella Fase 2 varia e non è inclusa nella tabella.

Lunghezza del raggio del cerchio	**Lunghezza dei lati del triangolo equilatero inscritto**	**Misura degli angoli del triangolo equilatero inscritto**
30°	≈ 57°	≈ 67°
60°	≈ 97°	≈ 98°
90°	120°	180°

Potreste desiderare di calcolare i valori esatti, utilizzando formule trigonometriche per triangoli sulle superfici sferiche, che sono simili alle formule trigonometriche per triangoli sulle superfici piane. Per esempio, se il raggio di un cerchio è r, la lunghezza di un lato del triangolo inscritto equilatero a, e la misura dell'angolo del triangolo A, allora la formula per calcolare il lato del raggio è sen $(a/2)$ = sen r • sen 60°. La formula per calcolare l'angolo dal lato è cos A =
(cos a) / (1-cos a). Se il raggio è 90°, allora il cerchio è un cerchio massimo. Se il triangolo equilatero coincide con questo cerchio massimo, ogni lato del triangolo misura 120° e ogni angolo 180°.

(N.B DA QUI COMINCIA LA PAG. 14)

Riflessioni sulle vostre costruzioni: rivisitazioni di alcune idee di base

Questi quesiti possono portare a scoperte riguardo una gran varietà di differenze fra la geometria piana e quella delle superfici sferiche. Le risposte date qui sono brevi. C'è molto di più da dire. Potete trovare risposte e definizioni più dettagliate in *Non-Euclidean Adventures on the Lénárt Sphere* (Avventure non-euclidee sulla Sfera di Lénárt).

1. La somma delle misure degli angoli di un triangolo su un piano è sempre 180°. La somma delle misure degli angoli di un triangolo sulla sfera varia a secondo della superficie della sfera ricoperta dal triangolo. La somma più piccola è quella di un triangolo molto piccolo che è praticamente "piatto". La somma delle misure degli angoli di questo triangolo è poco più di 180°.
   Se decidete che il triangolo con i vertici sullo stesso cerchio massimo è il triangolo "più grande", allora il valore massimo della somma degli angoli è 540°. Se non permettete che i vertici di un triangolo si trovino su un cerchio massimo, allora la somma massima delle misure degli angoli si avvicina ma non raggiunge mai 540°. Si potrebbe argomentare che la somma delle misure degli angoli di un triangolo può arrivare fino a 900°! Dipende dalla definizione di un triangolo sulla sfera.
2. Non esistono sulla sfera forme simili ma non congruenti. Anche se sulla sfera i poligoni possono avere lati corrispondenti in proporzione, i loro angoli corrispondenti non saranno congruenti. Sulla sfera, una forma si distorce man mano che si modifica la scala. Nonostante tutti i triangoli equilateri su di un piano siano simili, i triangoli equilateri sulla sfera non sono mai simili a meno che non siano congruenti.
3. Gli angoli di un triangolo su di un piano sono indipendenti dalla dimensione del triangolo. Questo non vale per la sfera (vedere la risposta alla domanda 1).
4. Su un piano è sempre possibile disegnare un cerchio che contiene (è più grande di) un cerchio dato, quindi non esiste un cerchio più grande in senso assoluto. Sulla sfera non esiste un cerchio che possa contenere un cerchio massimo, quindi un cerchio massimo è il cerchio più grande in assoluto.
5. Su di un piano è sempre possibile disegnare un triangolo che contiene (che è più ampio di) un triangolo dato, quindi non esiste un triangolo più grande in assoluto. Sulla sfera, nessun triangolo può contenere il grande "triangolo" che ha tutti e tre i vertici su di un cerchio massimo, quindi questo triangolo circolare è il triangolo più grande – se permettete che i vertici di un triangolo si trovino su di un cerchio massimo.
6. Su di un piano potete disegnare un numero infinito di coppie di linee rette parallele. Sulla sfera non esistono cerchi massimi paralleli.
7. Se dimezzate il diametro di un cerchio su un piano, si dimezza anche la circonferenza. Se dimezzate il diametro di un cerchio sulla sfera, la circonferenza del cerchio più piccolo sarà più grande della metà della circonferenza del cerchio più grande.
   La circonferenza di un cerchio su un piano ha sempre lo stesso rapporto con il suo diametro. Questo rapporto, π, è costante, indipendentemente dalla misura del cerchio. Sulla sfera, il rapporto della circonferenza nei confronti del diametro non è costante, ma varia invece secondo la misura del cerchio. Per un cerchio piccolo, il rapporto è poco meno di π; per un cerchio massimo il rapporto è esattamente 360°/180°, o 2. Quindi il rapporto della circonferenza nei confronti del diametro di un qualsiasi cerchio su una superficie sferica è un numero inferiore a π e più grande o uguale a 2.
   Se desiderate potete calcolare il rapporto circonferenza/diametro di un cerchio su una superficie sferica dal raggio r utilizzando la formula $C = 360$ sen r. Per esempio, il cerchio massimo con il diametro di 60° (raggio 30°) ha una circonferenza di 180°, o metà della circonferenza di un cerchio massimo. Questo dà un rapporto circonferenza/diametro di 180°/60°, o 3.

8. Se vi muovete su di un piano lungo un cerchio molto, molto ampio, vi sembrerà che vi stiate muovendo su una linea retta, ma il vostro percorso sarà sempre leggermente curvo. Sulla sfera, invece, un cerchio massimo è l'equivalente sferico di una linea retta. Quindi, se viaggiate lungo un cerchio massimo vi state muovendo lungo una linea retta.