matematita
Centro interuniversitario
di ricerca per la comunicazione
e l'apprendimento informale
della matematica

FASCICOLO INTRODUTTIVO al *kit* di laboratorio

DIAMO FORMA ALLA GEOMETRIA: GRANDE O PICCOLO?

per classi della scuola secondaria di I grado

di Alessandra Brena e Ombretta Locatelli

Collana Quaderni di Laboratorio
Titolo Diamo forma alla geometria: Grande o piccolo? - per la scuola secondaria di I grado
di Alessandra Brena e Ombretta Locatelli
Progetto grafico di Marianna Lorini
VI versione – luglio 2013

Questo fascicolo è stato pensato per essere usato con il *kit* di laboratorio cui si riferisce

SOMMARIO

Questo fascicolo è stato pensato per essere usato con il *kit* di laboratorio cui si riferisce

INTRODUZIONE

I laboratori a cui questo fascicolo si riferisce propongono diverse attività riguardanti poliedri e tassellazioni piane, calibrate per classi della scuola secondaria di primo grado.
Il materiale a disposizione permette di costruire con facilità una grande varietà di forme, piane e solide; ciò stimola la curiosità dei ragazzi e rende naturale il passaggio da una lettura della realtà che sia puramente intuitiva e legata all'osservazione e alla manipolazione a un'analisi più astratta di alcune questioni e a una prima formalizzazione di taluni fra i concetti affrontati.

Le attività di laboratorio descritte in questo quaderno sono di due tipi (non disgiunti fra loro, ovviamente):

1. osservazione e descrizione delle proprietà (qualitative) dei poliedri;
2. risoluzione di problemi relativi ai concetti di area e volume.

Altre questioni relative ai poliedri sono oggetto di un secondo quaderno, dal titolo "Diamo forma alla geometria. Regolari o no?" che tratta di questioni legate alla struttura combinatoria (contare vertici, spigoli, facce), alla simmetria e alla regolarità. I due laboratori sono fra loro indipendenti e possono essere utilizzati in un ordine qualsiasi.

PERCHÉ I POLIEDRI

Nella scuola pre–universitaria, l'argomento "poliedri" soffre da anni di una cronica mancanza di attenzione che ne ha ridotto lo studio alla memorizzazione di qualche nome e di qualche formula per il calcolo di aree e volumi. E ciò anche se l'argomento si presta molto bene a sviluppare la capacità degli studenti di osservare la realtà, costruendo quel bagaglio di esperienze che sono un primo passo fondamentale verso la comprensione profonda dei fatti matematici (e non solo!). In generale, vedere l'oggetto che si sta studiando, ricostruirlo e manipolarlo sono possibilità preziose al fine di interiorizzare i concetti coinvolti: in questo laboratorio, in particolare, le definizioni non restano sulla carta, ma corrispondono a caratteristiche che i ragazzi scoprono via via e autonomamente, mentre i problemi affrontati e discussi permettono di riempire di significato i concetti di area e volume.

I CONTENUTI

Dedicare tempo all'osservazione degli oggetti concreti, modelli dei poliedri astratti, innanzitutto permette ai docenti di far emergere negli studenti le domande che aprono la strada ai problemi che verranno posti (relativamente alla misura) e, secondariamente, consente ai ragazzi di rendersi conto (toccando con mano, in senso proprio!) della enorme varietà di "forme" possibili nell'ambito dei poliedri. Troppo spesso i ragazzi pensano che i soli poliedri possibili siano prismi e piramidi; se invece li si lascia liberi di costruire, e si mette loro a disposizione del materiale che consenta di farlo con facilità, producono in modo molto naturale le forme più svariate (dai poliedri regolari agli antiprismi, dai poliedri stellati ad altri oggetti "bislacchi" che non rientrano nelle categorie usuali) e quindi anche per loro diventa un problema intrigante quello di classificare questi oggetti, di "metterli in ordine", di capire le loro caratteristiche.

Occuparsi della descrizione degli oggetti proposti dal laboratorio significa occuparsi di un problema particolarmente delicato, che va a toccare direttamente la questione del linguaggio e del quanto e come dobbiamo richiedere ai ragazzi che esso sia rigoroso. Spesso gli studenti non comprendono l'esigenza del rigore, che avvertono solo come un gran peso, finendo per "recitare" delle definizioni stereotipate, senza rendersi conto esattamente del significato di alcuni aggettivi o di alcune precisazioni.

Diversa è la situazione se viene mostrato loro su un esempio e nel contesto di un gioco (come si fa nell'ultima attività della scheda A di questo laboratorio) quanto sia necessario un linguaggio preciso se si vuole capire ciò che i compagni vanno dicendo e se ci si propone di farsi capire dagli stessi compagni, e quale può essere l'effetto dell'alterazione o dell'omissione di una singola parola nell'individuare, per esempio, un poliedro.

Studiare questioni di misura facendo riferimento – come nel laboratorio descritto in questo quaderno – ai poliedri è particolarmente interessante, perché vi sono coinvolte misure lineari sugli spigoli, misure di area sulle facce e anche misure di volume.

Non ci interessa però qui il CALCOLO di aree e volumi (e men che meno ci interessano le relative formule: non a caso, si tratta di attività suggerite anche per le prime classi); vogliamo piuttosto rendere i ragazzi consapevoli di CHE COS'È il volume (e l'area) e di come spesso sia possibile, anche senza conoscere formule (che possono non essere a disposizione per poliedri particolarmente "bislacchi"), arrivare a una stima di grandezza, e a volte a conoscere il rapporto, per esempio, fra i volumi di due particolari solidi. In particolare, le attività descritte in questo quaderno insistono sul tema del legame tra similitudine e area e volume, portando quindi i ragazzi a toccare con mano come, raddoppiando le misure lineari di un oggetto, la sua area superficiale quadruplichi e il volume diventi 8 volte quello di partenza.

Più in particolare le 5 schede di laboratorio illustrate in questo quaderno sono così organizzate:

- la scheda A prevede una prima fase di manipolazione e osservazione che rappresenta un'occasione per introdurre/ricordare ai ragazzi che cosa sono i poliedri. Nella seconda fase, che è in realtà una sorta di "jolly" e può essere svolta in un qualsiasi momento del percorso, un gruppo di ragazzi deve descrivere ai compagni un poliedro a scelta, e questi, senza poterlo vedere, devono essere in grado di ricostruirlo;

- la scheda B propone il confronto fra tre prismi aventi per base un triangolo equilatero: il primo funziona da riferimento, il secondo ha lo stesso lato di base del primo e altezza doppia, mentre il terzo ha la stessa altezza del primo e lato di base di lunghezza doppia; la scheda è disponibile in due versioni (per le prime due classi e per la classe III);
- la scheda C propone il confronto fra (superfici laterali e volumi di) cubi di lato diverso. I ragazzi hanno a disposizione due cubi, di cui il primo è di spigolo doppio del secondo, a partire dai quali non sarà difficile riconoscere come variano superficie laterale e volume. Anche questa scheda non necessita di particolari prerequisiti;
- la scheda D propone alcuni "puzzle" di particolari poliedri, per aiutare gli studenti a stabilire alcune relazioni fra i volumi. Di nuovo, i ragazzi scopriranno che raddoppiando lo spigolo di un tetraedro il volume diventa 8 volte tanto, esattamente come succede per il cubo, anche se non si riesce a riempire il tetraedro grande con 8 tetraedri di spigolo metà;
- la scheda E propone alcuni ragionamenti sulle aree, legati sia, ancora, al tema della similitudine sia, anche, al teorema di Pitagora. Questa è l'unica scheda che NON viene proposta per le classi prime, in quanto si richiede una capacità di astrazione maggiore rispetto a quella che ci si può attendere da ragazzi di 11 anni.

I METODI

La modalità con cui proponiamo che le attività vengano svolte è quella "laboratoriale". Essa è strutturata nel seguente modo:

- suddivisione in piccoli gruppi di lavoro (4 o 5 studenti per gruppo: il materiale presente nel *kit* è sufficiente per al massimo 5 gruppi di lavoro);
- utilizzo del materiale manipolabile preparato per il laboratorio;
- svolgimento delle attività proposte nelle varie schede di lavoro;
- scrittura delle risposte negli appositi spazi sulla scheda di lavoro.

Questa modalità è finalizzata al raggiungimento di alcuni obiettivi, tipici del fare ricerca in matematica, che possiamo così riassumere:

- costruzione del proprio sapere;
- comunicazione delle proprie scoperte;
- interiorizzazione delle nozioni apprese.

Dalla collaborazione tra i componenti del gruppo, dai liberi tentativi di risposta e con la guida delle schede di lavoro, i ragazzi giungono autonomamente ad acquisire alcune conoscenze base sulla geometria dei poliedri.

È importante che gli studenti scrivano le risposte a cui sono giunti, anche se sbagliate. È molto meglio partire da qualcosa di sbagliato, ma che è scaturito dai ragionamenti dei ragazzi, piuttosto che mettere loro in testa le nostre risposte (se le dimenticherebbero a breve!). Inoltre è proprio nel momento in cui si rielaborano le conoscenze per comunicarle per iscritto che queste vengono interiorizzate e comprese a fondo. Infine, il fatto di riportare le risposte sulla scheda consente di tenere traccia del lavoro svolto, che può eventualmente essere ripreso successivamente in classe.

Altrettanto importante è che i ragazzi acquisiscano o affinino la capacità di descrivere la realtà e, in un certo senso, di "raccontare la matematica", come ad esempio è richiesto nella già descritta attività finale della scheda A. Riteniamo che questa abilità sia un passaggio fondamentale dell'apprendimento, successivo alla fase di osservazione, e che NON ne sia automatica conseguenza. In generale, l'aver capito i concetti, le proprietà, le "regole del gioco" non si traduce automaticamente in una buona facilità nel descrivere tutto ciò ai compagni: per raggiungere questo obiettivo occorre insistere con attività che siano a ciò esplicitamente finalizzate.

Durante lo svolgimento del laboratorio, l'insegnante ha il compito di sorvegliare le attività dei vari gruppi, garantendo una generale situazione di equilibrio. Può certamente sciogliere dubbi o fornire chiarimenti sulle "regole del gioco", sottolineare gli aspetti critici che scaturiscono dai ragionamenti e magari porre ulteriori domande suggerite proprio dai dibattiti in corso all'interno del gruppo, ma non deve dare risposte, facendo sempre in modo che gli studenti giungano autonomamente alle soluzioni.

La scheda di lavoro svolge la funzione di filo conduttore del laboratorio, ma non è necessario che venga seguita pedissequamente. Anzi, può essere particolarmente utile e stimolante in certe occasioni discostarsi dal tracciato delle schede, magari per seguire degli spunti scaturiti spontaneamente dal lavoro dei ragazzi. È importante lasciare ai gruppi il tempo di svolgere le attività richieste, ma non importa se non tutti i gruppi riescono a terminare l'attività nel tempo stabilito; importa invece che essi affrontino i quesiti scontrandosi con le difficoltà proprie del laboratorio e cercando di ragionare sui metodi da adottare per superarle. Lo scopo del laboratorio è quello di aiutare i ragazzi a costruire il proprio sapere autonomamente. La guida attenta e competente dell'insegnante, che resta naturalmente un elemento cruciale per stimolare opportunamente i ragazzi, non deve togliere loro la sensazione della scoperta.

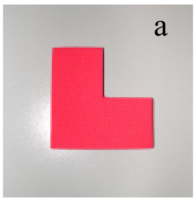
I POSSIBILI PERCORSI E I TEMPI

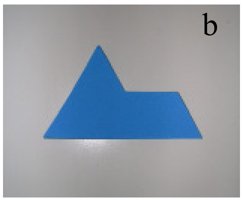
Ciascuna delle schede di lavoro raccolta in questo quaderno è pensata per attività dalla durata variabile, in linea di massima, intorno all'ora e mezza.
Riteniamo sia ragionevole pensare che le prime schede possano richiedere un tempo di svolgimento maggiore delle ultime, in quanto i ragazzi devono ancora prendere confidenza con il materiale e con la modalità di lavoro, che per loro potrebbe essere nuova.
Se l'insegnante decide di proporre questo laboratorio agli studenti, non è necessario che affronti prima in classe i temi che vi vengono trattati; infatti il laboratorio contiene una prima attività, quella della scheda A, che è una sorta di introduzione alla nozione di poliedro.
Ciascuna delle schede successive (B, C, D, E) può poi costituire un percorso a sé stante.
Le schede di laboratorio sono le stesse per ciascuna classe (dalla prima alla terza). Naturalmente, ad una medesima richiesta faranno riscontro risposte diverse e si accetteranno livelli di approfondimento diversi, a seconda dell'età dei ragazzi (si vedano i commenti alle singole attività delle schede). Fanno eccezione, come già detto, la scheda E, sconsigliata, di norma, per le classi prime e alcune domande, proposte solo nei commenti per gli insegnanti, specificatamente pensate per alunni delle classi terze. Inoltre come già detto, la scheda B è disponibile in due versioni.

IL MATERIALE A DISPOSIZIONE

Il *kit* di laboratorio comprende:

1. questo fascicolo di presentazione del laboratorio;
2. tessere di *polydron* di varie forme:
   - 380 triangoli equilateri piccoli;
   - 250 triangoli rettangoli isosceli;
   - 220 quadrati;
   - 60 pentagoni;
   - 80 triangoli equilateri grandi;
   - 20 esagoni;
3. tessere in gomma *crepla*:
   - 50 quadrati;
   - 85 rettangoli;
   - 50 triangoli equilateri;
   - 85 esagoni concavi come in fig. a;
   - 50 pentagoni concavi come in fig. b;
   - 50 trapezi rettangoli;





- 45 triangoli rettangoli isosceli;
- 20 triangoli rettangoli;

4. 5 bustine con 9 pezzi di gomma *crepla* ciascuna;
5. 5 divisori per il gioco “moscacieca”;
6. 10 schedine con poliedri (scheda A);
7. un poster formato A4 plastificato con disegni di poliedri (scheda A);
8. 5 schede plastificate formato A3 e 10 formato A4 (scheda E);
9. il poster “Un mondo di poliedri...”;
10. una copia delle schede A, B, C, D ed E da fotocopiare;
11. elenco del materiale;
12. istruzioni per l’utilizzo del materiale;
13. un CD-rom contenente i file del materiale cartaceo utile per lo svolgimento del laboratorio ed eventuale altro materiale di integrazione.

Per quanto riguarda le immagini, osserviamo che nei commenti alle schede diretti ai docenti (in questo fascicolo) ne facciamo un largo uso, anche al di là di quelle inserite effettivamente nel testo: quando nel testo si incontra un numero in grassetto (come **6340**) si tratta di un’immagine, reperibile in rete nel sito “Immagini per la matematica” del Centro “matematita”, all’indirizzo

http://www.matematita.it/materiale/?p=cat&im=6340.

L’immagine corrispondente si trova inserita anche nel CD-rom (e il numero corrisponde al nome del file), ma l’invito è a usare appena possibile la rete, dove le immagini sono (molte di più di quelle qui indicate e sono) dotate anche di una didascalia ipertestuale che rimanda dall’una all’altra. Nello stesso sito si possono trovare altre immagini, oltre a quelle segnalate, sugli stessi temi: si suggerisce ad esempio di consultare la sezione del catalogo dedicata ai poliedri

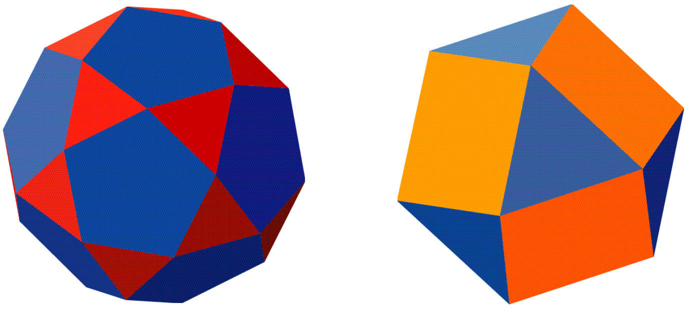
(vedi http://www.matematita.it/materiale/?p=cat&sc=272)

dove si possono trovare molte immagini analoghe a quelle proposte qui.

Nota importante: nel fascicolo, per ogni scheda è riprodotto in nero (con le figure) il testo dato ai ragazzi, mentre in blu sono scritti sia i nostri commenti per gli insegnanti che le risposte attese dagli studenti.

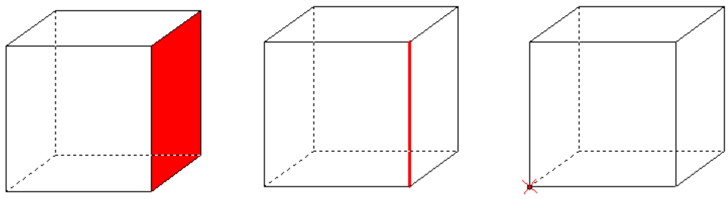
SCHEDA A – GUARDIAMOCI INTORNO

Osservate la seguente immagine e provate a ricostruire gli oggetti tridimensionali raffigurati. Potete utilizzare le tessere colorate.



Gli oggetti in questa figura rappresentano dei POLIEDRI. Sono poliedri gli oggetti costruiti con le tessere come quelle che avete a disposizione nel *kit* in cui tutte le mattonelle usate si incastrano con un'altra mattonella lungo ciascuno dei lati (cioè quelli che "si chiudono").

Sapreste dire che cosa sono VERTICE, SPIGOLO e FACCIA di un poliedro? Per aiutarvi abbiamo inserito un'immagine qui sotto: in ciascuna figura è messo in evidenza uno (e uno solo) dei tre elementi. Scrivete il nome subito sotto:



Non vogliamo in questa fase insistere con le definizioni (in particolare con la definizione di poliedro, che è abbastanza delicata, se si vuole essere precisi come è necessario esserlo dando una definizione), ma vogliamo piuttosto semplicemente "metterci d'accordo" su che cosa intendiamo con le diverse parole coinvolte in questa discussione. Segnaliamo in particolare il fatto che nel linguaggio comune si usa la parola "spigolo" anche a intendere quello che in matematica si chiama "vertice" e ciò può causare problemi ai ragazzi.
Per ricostruire i poliedri in figura ogni gruppo deve avere a disposizione 12 pentagoni, 28 triangoli equilateri e 6 quadrati. Tuttavia può essere utile tenere a disposizione il resto del materiale in dotazione nel kit, *se qualche gruppo volesse provare a costruire altri poliedri.*

Torniamo ai poliedri che avete ricostruito.
Quante facce ha il primo? *32*. E il secondo? *14*.

Che tipo di poligoni sono le facce? E quante ce ne sono per ciascun tipo? Per il primo: *12 pentagoni regolari e 20 triangoli equilateri*. Per il secondo: *6 quadrati e 8 triangoli equilateri*.

Se vi diciamo che il primo poliedro ha 30 vertici e il secondo ne ha 12 ci credete? Perché? Come potete fare per sincerarvene?

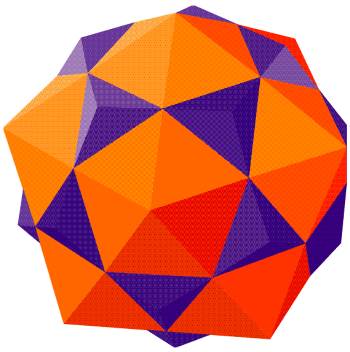
Quanti spigoli escono da ogni vertice?
Per il primo *4*.
Per il secondo *4*.

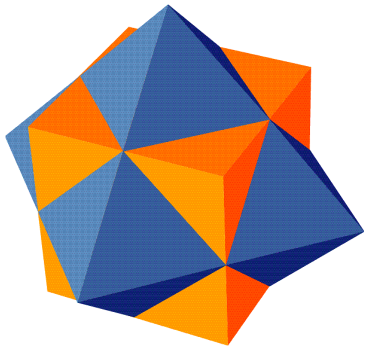
Sapendo quanti sono i vertici e quanti spigoli escono da ogni vertice, potete dire quanti sono in totale gli spigoli senza fare la fatica di contarli? (*Attenzione: ogni spigolo ha DUE vertici*).

Il problema di contare (soprattutto vertici e spigoli) non è un problema banale e non è un caso che qui si chieda di contare essenzialmente solo le facce; per i vertici si danno i numeri e si chiede una conferma; per gli spigoli si cerca di indurre i ragazzi a ottenere questo numero a partire dagli altri senza il conto diretto che non è particolarmente difficile, ma sarebbe un po' lungo. Ottenere il numero degli spigoli dai numeri già trovati richiede un ragionamento non ovvio, perché i ragazzi devono rendersi conto che moltiplicando il numero dei vertici per 4 (il numero degli spigoli che esce da ogni vertice) ottengono il DOPPIO del numero totale di spigoli (proprio perché ogni spigolo ha due vertici e quindi in questa maniera viene contato due volte). Quindi il poliedro di sinistra ha 60 $\left(=\frac{30 \times 4}{2}\right)$ *spigoli e quello di destra ne ha 24* $\left(=\frac{12 \times 4}{2}\right)$.
Se i ragazzi amano questo tipo di problema, è istruttivo lasciarli provare a fare questi conti anche con altri poliedri: in effetti, dover contare le facce, i vertici e soprattutto gli spigoli di un poliedro un po' complicato obbliga a "organizzare" il conto in qualche maniera, il che fa prendere consapevolezza della struttura dell'oggetto, in particolare della sua simmetria.
Se si propone lo stesso problema con altri poliedri, diversi da quelli in figura, occorrerà tener presente che la domanda "Quanti spigoli escono da ogni vertice?" ha senso per questi due poliedri perché da ogni loro vertice esce lo stesso numero di spigoli, cosa che in generale non accade; in altri casi si potrà quindi formulare la domanda chiedendo quanti sono i vertici da cui escono 3 spigoli, quanti quelli da cui ne escono 4 ecc.

È possibile che i ragazzi notino (se hanno già incontrato i poliedri regolari o per esempio se ritornano su questa scheda dopo aver discusso le successive) il fatto che i numeri delle diverse facce di questi poliedri (6-8-12-20) sono proprio i numeri delle facce di quattro dei 5 poliedri regolari. In effetti questo non è un caso: il poliedro a destra nella figura di pagina 7 (**4269**) *si può ottenere da un cubo (o*

anche da un ottaedro) prendendo come vertici i punti medi degli spigoli; il poliedro a sinistra invece **(4264)** *si può ottenere da un dodecaedro (o anche da un icosaedro) prendendo come vertici i punti medi degli spigoli. Le due figure che seguono* **(4262** *e* **4268)** *mostrano insieme cubo e ottaedro (sulla destra) e dodecaedro e icosaedro (sulla sinistra).*
Queste figure sono legate ai poliedri di pagina 7, perché, se si immaginano, per esempio, cubo e ottaedro pieni, il poliedro ottenuto come intersezione dei due è proprio il poliedro sulla destra di pagina 7 (e analogamente per quella sulla sinistra).





MOSCA CIECA

Dividetevi in due gruppi A e B; il gruppo A ha a disposizione l'immagine di un poliedro da descrivere al gruppo B per farglielo ricostruire. Le regole sono poche:

- A non può dire il nome del poliedro,
- A non deve mostrare l'immagine del poliedro a B.

GRUPPO A
Scrivete qui sotto le indicazioni più importanti da dare ai vostri compagni: (…)
Confrontate poi il poliedro costruito dal gruppo B con quello della vostra immagine.
È lo stesso? SÌ NO

Se avete risposto "NO", provate a capire, insieme ai vostri compagni del gruppo B, quale o quali sono state le informazioni che hanno indotto i vostri compagni all'errore e scrivetele: (…)

ORA A E B SI SCAMBIANO I RUOLI.

(…)

Il gioco qui proposto ha lo scopo di focalizzare l'attenzione dei ragazzi sulle conseguenze di un linguaggio ambiguo (e sulla conseguente necessità – in talune circostanze – di un linguaggio rigoroso).
Sappiamo bene come sia pesante per i ragazzi accettare le "pedanterie" di linguaggio tipiche della matematica, in cui a volte un aggettivo o una virgola fuori posto hanno delle conseguenze inaspettate. L'insofferenza per questi aspetti aumenta, ovviamente, se non si è perlomeno consapevoli di cosa può accadere usando un linguaggio ambiguo; questo gioco ha proprio lo scopo di portare alla consapevolezza che, in certe circostanze, non di pedanteria si tratta, ma di precisazioni che sono necessarie per… capirsi.

Il gruppo che descrive il poliedro deve dare le informazioni corrette allo scopo di far indovinare ai compagni di quale forma si tratti, deve quindi essere "onesto" e non dare volutamente indicazioni fuorvianti. Si tratta di un gioco senza vincitori, in cui tutti i ragazzi hanno uno scopo comune.

Prima di iniziare il gioco, su ogni tavolo (di 4 o 5 ragazzi) si pone un divisorio sul banco per separare i gruppi A e B (di 2 o 3 ragazzi ciascuno), in modo che il poliedro usato da un gruppo non sia visibile all'altro. Ciascun gruppo estrae quindi una delle schedine dal mazzo di 10 in dotazione; ogni scheda contiene l'immagine di un poliedro che può essere ricostruito con il materiale a disposizione.
Fra il materiale è contenuto anche un foglio A4 plastificato con le 10 immagini dei 10 poliedri utilizzati in queste schedine. A discrezione dell'insegnante questa lista può essere mostrata durante il gioco, oppure soltanto alla fine: si tratta naturalmente di una grossa facilitazione per i ragazzi sapere che il poliedro che devono ricostruire è uno dei 10 di cui vedono l'immagine. Ovviamente, se si opta per questa facilitazione, bisognerà vietare ai ragazzi indicazioni del tipo "si tratta di quello in alto a sinistra".
Per comodità dell'insegnante, riportiamo qui sotto i numeri delle tessere necessarie per ricostruire ciascuno dei 10 poliedri delle schedine.

1	*icosaedro regolare*	**4261**	*20 triangoli equilateri grandi*
2	*antiprisma pentagonale*	**922**	*2 pentagoni e 10 triangoli equilateri piccoli*
3	*poliedro uniforme di tipo (3,3,3,3,4)*	**4254**	*32 triangoli equilateri piccoli e 6 quadrati*
4	*dodecaedro regolare*	**1709**	*12 pentagoni*
5	*poliedro uniforme di tipo (3,4,3,4)*	**4269**	*8 triangoli equilateri piccoli e 6 quadrati*
6	*poliedro uniforme di tipo (4,6,6)*	**4271**	*6 quadrati e 8 esagoni*
7	*ottaedro regolare*	**4265**	*8 triangoli equilateri grandi*
8	*poliedro uniforme di tipo (3,4,5,4)*	**1704**	*20 triangoli equilateri piccoli, 12 pentagoni, 30 quadrati*

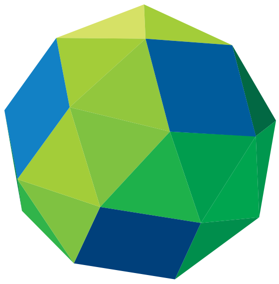
9	*poliedro uniforme di tipo (3,5,3,5)*	**4264**	*20 triangoli equilateri piccoli e 12 pentagoni*
10	*poliedro uniforme di tipo (5,6,6)*	**1702**	*12 pentagoni e 20 esagoni*

Naturalmente stiamo implicitamente assumendo un'ipotesi non irrilevante, senza la quale la richiesta di ricostruire il poliedro a partire dal disegno sarebbe mal posta: nessuno ci dice infatti come è fatto il poliedro "dietro"! Stiamo quindi supponendo che il poliedro continui dietro "allo stesso modo" ed è proprio il fatto che si tratta di poliedri che godono di una certa regolarità che ci autorizza a fare questa ipotesi: se in tutti i vertici che si vedono arrivano un quadrato e due esagoni (come nel poliedro 6) possiamo ipotizzare che anche in quelli che non si vedono arrivino un quadrato e due esagoni.
Ci aspettiamo che i ragazzi diano per scontato questo fatto e, se non sono loro a farlo, non vale la pena sollevare il problema.
Se però qualche ragazzo lo solleva, è bene approfittarne per discutere la cosa esplicitando questa ipotesi (e non mancando di apprezzare la capacità logica e di osservazione di chi ha notato il problema!).
C'è un caso (il 3, poliedro uniforme di tipo 33334) in cui il poliedro può essere realizzato in due forme diverse, speculari una rispetto all'altra.
Per un approfondimento sul tema dei poliedri vedi sito (http://www.matematita.it/personali/index.php?blog=6&cat=80) oppure: Maria Dedò, Forme*, Decibel, Zanichelli, 1999.*
Se i ragazzi mostrano di apprezzare questo gioco, l'insegnante può anche ripeterlo con altre immagini, o scelte dal CD–rom (curando che i ragazzi abbiano a disposizione il materiale per ricostruirli) oppure costruendo prima un poliedro con il materiale a disposizione e fotografandolo. Suggeriamo in ogni caso di non utilizzare per il gioco poliedri troppo semplici (come prismi o piramidi), ma neanche troppo complicati.

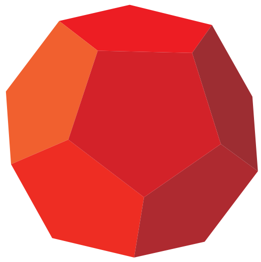
Abbiamo inserito questa attività nella prima scheda di laboratorio, per indurre i ragazzi a prestare attenzione al linguaggio usato e a mettersi d'accordo sui termini. Tuttavia l'attività può essere usata come "jolly", nel senso che potrebbe essere svolta anche in un qualunque altro momento del percorso in laboratorio.

1 *- Icosaedro regolare*

2 *- Antiprisma pentagonale*



3 *- (3,3,3,3,4)*

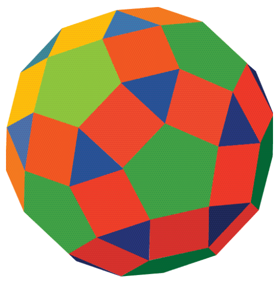


4 *- Dodecaedro regolare*

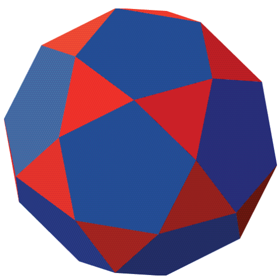
5 *- (3,4,3,4)*

6 *- (4,6,6)*

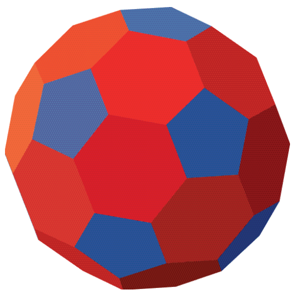
7 *- Ottaedro regolare*



8 *- (3,4,5,4)*



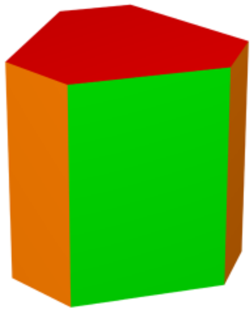
9 *- (3,5,3,5)*

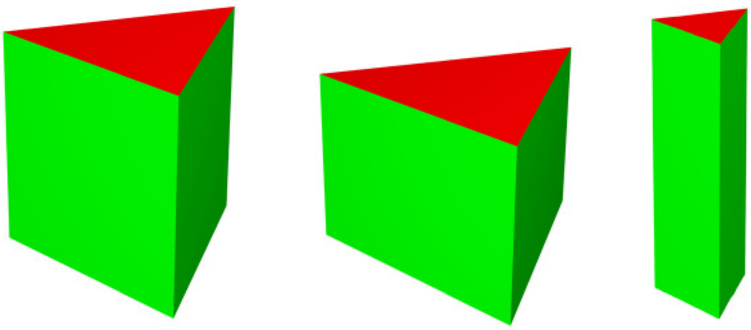


10 *- (5,6,6)*

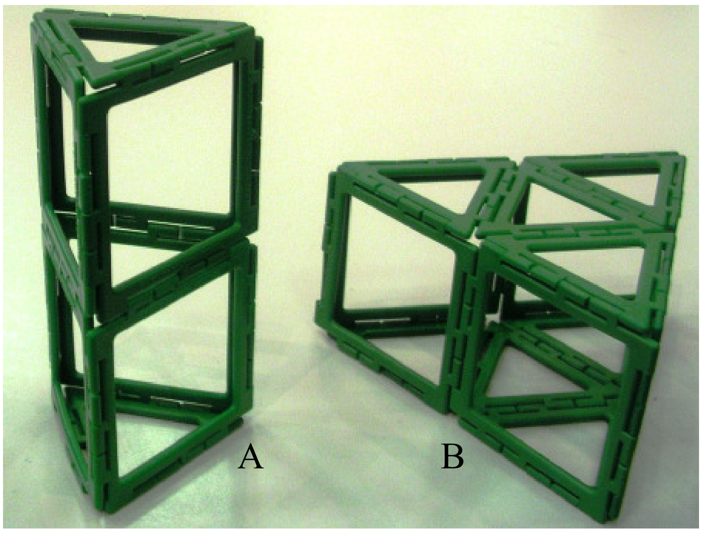
SCHEDA B tipologia a - RADDOPPIAMO I LATI

Questa scheda è proposta per le classi I e II di scuola secondaria di primo grado, ovvero per quelle classi che non hanno ancora affrontato la geometria solida. Qui non si fa infatti uso delle formule per il calcolo dei volumi dei prismi, ma semplicemente si fa riferimento all'inscatolamento di oggetti. Pensiamo che non dia particolari difficoltà il fatto che i ragazzini più piccoli possano non conoscere la parola "prisma": suggeriamo in tal caso di mostrare loro molto semplicemente alcuni esempi di oggetti che chiamiamo prismi, come quello nell'immagine qui a fianco (**10130**) *o come questi altri* (**6241**, **932**)*, e in particolare prismi a base triangolare come quelli qui sotto* (**10127**, **10126**, **10125**).





Con le tessere colorate che trovate sul tavolo costruite gli oggetti A e B che vedete nella foto qui sotto (*usate i triangoli equilateri piccoli*):



Decidiamo che il lato delle tessere triangolari che avete a disposizione misura 1 e che A e B rappresentano rispettivamente un prisma retto che ha per base un triangolo

equilatero di lato 1 e altezza uguale a 2 e un prisma retto che ha per base un triangolo equilatero di lato 2 e altezza uguale a 1.
Chiamiamo C il prisma retto avente per base un triangolo equilatero di lato 1 e altezza uguale a 1:
In questa prima attività cerchiamo di far quantificare ai ragazzi l'impressione di quanto un oggetto è più grande o più piccolo di un altro.

- Il volume del prisma C, rispetto a quello dei prismi A e B, è

☐ PIÙ GRANDE ☐ UGUALE ☐ PIÙ PICCOLO

Ci aspettiamo che non abbiate avuto alcuna esitazione a rispondere a questa domanda.
Provate ora a rispondere a quest'altra:

- Il volume del prisma A, rispetto a quello del prisma B, è

☐ PIÙ GRANDE ☐ UGUALE ☐ PIÙ PICCOLO

Cerchiamo di capire anche di **quanto** sono più grandi i prismi A e B rispetto al prisma C:

- Riuscireste a usare diverse copie del prisma C per riempire il prisma A?

☐ SÌ ☐ NO

- Se avete risposto sì, quante copie del prisma C vi occorrerebbero? *2*

- Riuscireste a usare diverse copie del prisma C per riempire il prisma B?

☐ SÌ ☐ NO

- Se avete risposto sì, quante copie del prisma C vi occorrerebbero? *4*

- Cosa potete dire quindi del rapporto fra il volume del prisma A e il volume del prisma B? *Il volume di B è il doppio del volume di A.*

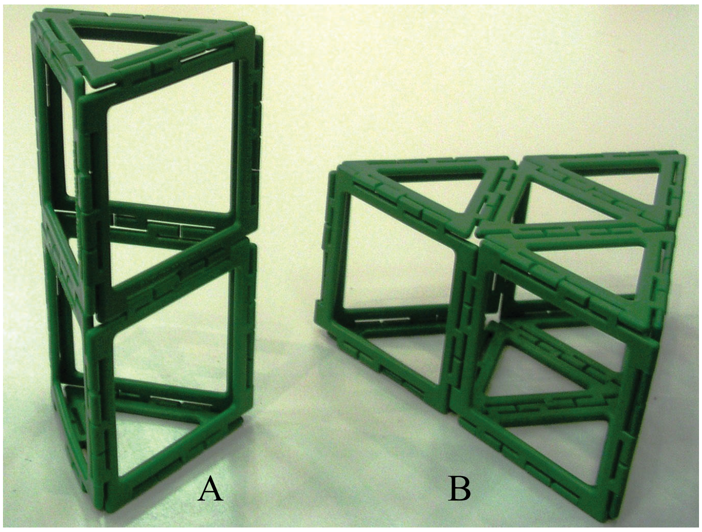
La situazione proposta in questa scheda è la più semplice, ovvero quella in cui è

possibile usare un certo numero di copie di uno dei due oggetti per "riempire" l'altro; ci immaginiamo che i ragazzi non abbiano difficoltà a vedere come due copie del prisma C equivalgano al prisma A e occorrano invece 4 copie di C per costruire il prisma B.
Naturalmente l'insegnante può approfondire questo spunto in diverse maniere (a seconda della classe e del momento).
In una classe prima o seconda, in cui i volumi non sono stati ancora affrontati (ricordiamoci però sempre che gli esempi tratti dalla geometria solida sono quelli più concreti, e quindi è bene utilizzarli anche prima di averne affrontato lo studio sistematico), si può comunque far osservare il fenomeno e chiedere ai ragazzi stessi se sanno spiegare come mai raddoppiando l'altezza (passaggio dal prisma C al prisma A) il volume raddoppia, mentre raddoppiando il lato di base (passaggio dal prisma C al prisma B) il volume diventa 4 volte tanto.

SCHEDA B tipologia b - RADDOPPIAMO I LATI

Questa scheda è proposta per la classe III di scuola secondaria di primo grado, ovvero per ragazzi che hanno già affrontato la geometria solida, quindi che ne conoscono i termini fondamentali e sanno leggere semplici formule.

Con le tessere colorate che trovate sul tavolo costruite gli oggetti A e B che vedete nella foto qui sotto (*usate i triangoli equilateri piccoli*):



Decidiamo che il lato delle tessere triangolari che avete a disposizione misura 1 e che A e B rappresentano rispettivamente un prisma retto, di altezza uguale a 2, che ha per base un triangolo equilatero di lato 1 e un prisma retto, di altezza uguale a 1, che ha per base un triangolo equilatero di lato 2.
Chiamiamo C il prisma retto, di altezza uguale a 1, che ha per base un triangolo equilatero di lato 1:

In questa prima attività cerchiamo di far quantificare ai ragazzi l'impressione di quanto un oggetto è più grande o più piccolo di un altro, senza l'uso di formule!

- Il volume del prisma C, rispetto a quello dei prismi A e B, è

☐ PIÙ GRANDE ☐ UGUALE ☐ PIÙ PICCOLO

Ci aspettiamo che non abbiate avuto nessuna esitazione a rispondere a questa domanda.

Provate ora a rispondere a quest'altra:

- Il volume del prisma A, rispetto a quello del prisma B, è

☐ PIÙ GRANDE ☐ UGUALE ☐ PIÙ PICCOLO

Cerchiamo di capire anche di **quanto** sono più grandi i prismi A e B rispetto al prisma C:

- Riuscireste a usare diverse copie del prisma C per riempire il prisma A?

☐ SÌ ☐ NO

- Se avete risposto sì, quante copie del prisma C vi occorrerebbero? *2*

- Riuscireste a usare diverse copie del prisma C per riempire il prisma B?

☐ SÌ ☐ NO

- Se avete risposto sì, quante copie del prisma C vi occorrerebbero? *4*

- Cosa potete dire quindi del rapporto fra il volume del prisma A e il volume del prisma B? *Il volume di B è il doppio del volume di A.*

La situazione proposta in questa scheda è la più semplice, ovvero quella in cui è possibile usare un certo numero di copie di uno dei due oggetti per "riempire" l'altro; ci immaginiamo che i ragazzi non abbiano difficoltà a vedere come due copie del prisma C equivalgano al prisma A e occorrano invece 4 copie di C per costruire il prisma B.

Ricordate la formula per calcolare il volume di un prisma retto con la base a forma di triangolo equilatero, dati il lato *l* del triangolo e l'altezza *h* del prisma? Se non ve la ricordate, ve la scriviamo noi qui sotto:

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 h$$

Cosa c'entra questa formula con i problemi che abbiamo visto? Per esempio con l'aiuto della formula, e senza bisogno di costruire i prismi, potreste rispondere alle seguenti domande sui prismi di questo tipo?

- Qual è il rapporto tra i volumi di due prismi con basi di lato uguale e altezza una il triplo dell'altra? *3*

- Qual è il rapporto tra i volumi di due prismi di uguale altezza e per i quali il lato della base dell'uno è il triplo di quello dell'altro? *9*

- Qual è il rapporto tra i volumi di due prismi in cui il lato di base del primo è doppio di quello del secondo e l'altezza del primo è il triplo di quella del secondo? *12*

- Sapreste formulare qualche altra domanda analoga?

- Sapreste inquadrare queste domande in uno schema che pensiamo abbiate già incontrato, quello della proporzionalità?

Naturalmente l'insegnante può approfondire questo spunto in diverse maniere (a seconda della classe e del momento) utilizzando questa attività per mostrare come " leggere" le formule. La formula

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 h$$

rappresenta un'occasione per far notare ai ragazzi che cosa significa il fatto che la lettera h compaia nella formula con esponente 1 (a parità di base, il volume è proporzionale all'altezza) mentre la lettera l compare con esponente 2 (a parità di altezza il volume non è proporzionale al lato di base, ma è proporzionale al suo quadrato).

SCHEDA C – CUBI

Prendete una tessera quadrata fra quelle che trovate sul tavolo.

Costruite ora un cubo in modo tale che una sua faccia sia una sola tra le tessere quadrate che avete a disposizione. PRIMA rispondete:

- Di quante tessere quadrate avrete bisogno?

6

Costruite ora un altro cubo, di spigolo DOPPIO di quello che avete costruito in precedenza; PRIMA però rispondete alla domanda:

- Quante tessere quadrate vi serviranno?

24

Chiedete all'insegnante questo materiale.
All'inizio di questa attività, ogni gruppo deve avere a disposizione soltanto 6 tessere quadrate per costruire un cubo.
Tenete sulla cattedra a disposizione altre tessere quadrate di polydron *in modo da poter fornire ai ragazzi quelle che vi chiedono. È probabile che alcuni ragazzi vi chiedano 12 tessere, immaginando che raddoppiando il lato avranno bisogno del doppio delle tessere: in effetti un obiettivo di questa attività è proprio quello di far acquisire consapevolezza del fatto che, raddoppiando lo spigolo di un cubo, la superficie diventa 4 volte tanto (e il volume 8 volte tanto).*
Provare direttamente questo fatto nella costruzione di cubi (soprattutto se si fa un primo tentativo sbagliato e si devono poi richiedere le tessere che mancano) darà poi sostanza all'acquisizione del risultato generale che in due figure simili, se il rapporto fra le misure lineari è k, quello fra le misure di superficie è k^2 e quello fra i volumi è k^3.

Dopo aver costruito i due cubi, potete avere una conferma delle vostre previsioni:

- Avevate indicato il numero corretto?

☐ SÌ ☐ NO

Se avete sbagliato, correggete qui sotto gli errori e provate a spiegare che cosa vi aveva indotto in confusione.
Avete ora a disposizione un cubo più piccolo e un cubo più grande, di lato doppio.

- Quanti cubi piccoli occorrerebbero per riempire il cubo grande?

8

Potremmo pensare di costruire un cubo di spigolo triplo, quadruplo, … Per costruirlo effettivamente però – soprattutto se volessimo farlo ancora più grande – ci vorrebbero troppo tempo e troppa pazienza. Possiamo però immaginare quello che succederebbe riempiendo la tabella seguente:

Spigolo / **Numero**	doppio	triplo	quadruplo
Tessere	*24*	*54*	*96*
Cubetti	*8*	*27*	*64*

Si tratta qui di un passaggio critico dal concreto all'astratto: mentre per il cubo di lato doppio i ragazzi avevano a disposizione il materiale per costruire direttamente gli oggetti coinvolti, e quindi probabilmente non avranno avuto grosse difficoltà a riempire la prima colonna, per le colonne successive non hanno abbastanza materiale (e probabilmente non hanno neanche voglia ...) e quindi si tratta di mettere in moto altre tecniche (più astratte).

Fissiamo come unità di misura per le lunghezze il lato di una tessera quadrata, e fissiamo di conseguenza le unità di misura di area e volume: il cubetto fatto con 6 tessere quadrate ha volume **V=1** e superficie totale (ovvero la somma delle aree di tutte le facce) **A=6**.

Con le osservazioni precedenti possiamo determinare il volume e la superficie totale di un cubo di lato 2, 3, ... Provate a riempire quest'altra tabella:

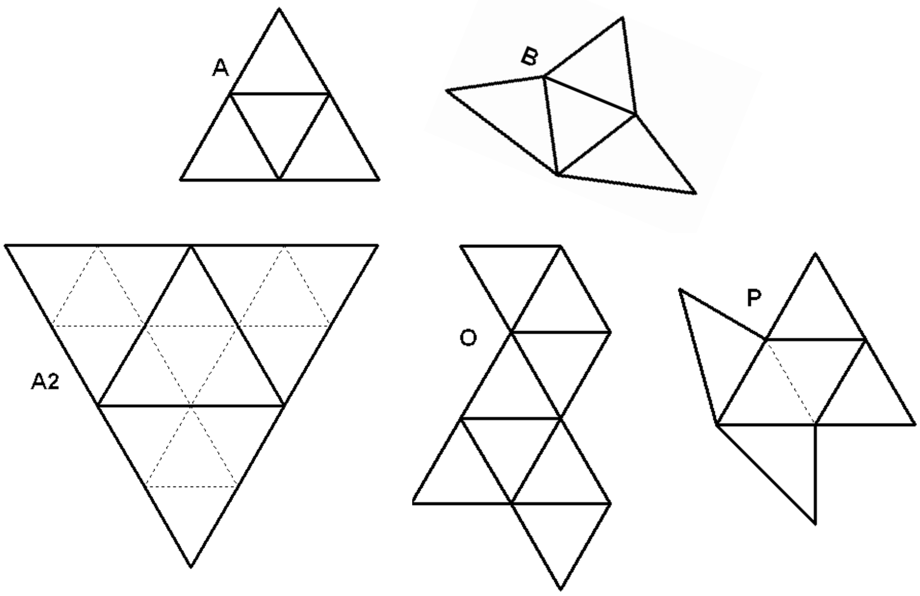
Spigolo	1	2	3	4	5	10	n
Area di una faccia	1	2x2=4	*9*	*16*	*25*	*100*	n^2
Superficie totale	6	4x6=24	*54*	*96*	*150*	*600*	$n^2 \times 6$
Volume	1	$2\times2\times2$ =8	*27*	*64*	*125*	*1000*	n^3

Avevamo proprio bisogno di questa tabella o tutte le informazioni erano contenute già nella prima, perlomeno fino a n=4? Sapreste spiegare perché?

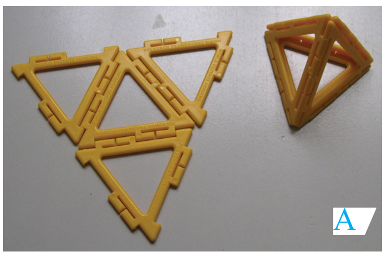
La precedente tabella segna il passaggio dal concreto all'astratto, operazione indispensabile per avvicinarsi al risultato generale secondo il quale in due figure simili, se il rapporto fra le misure lineari è k, quello fra le misure di superficie è k^2 e quello fra i volumi è k^3. Importante è sottolineare, e da qui il senso di questa ultima domanda, che questo passaggio comprende una SCELTA delle unità di misura delle lunghezze, delle aree e dei volumi, che qui abbiamo scelto rispettivamente come il lato di una tessera, l'area di una tessera e il volume di un cubetto.
Si potrebbe anche completare questa attività facendo costruire ai ragazzi un cubo (e poi il cubo di lato doppio) utilizzando del materiale diverso, con cui si mette in rilievo lo scheletro degli spigoli del cubo (ad esempio con delle cannucce da bibita). I ragazzi noteranno allora che in questo caso, per costruire il cubo di lato doppio, serve esattamente il doppio del materiale occorrente per costruire il primo cubo.

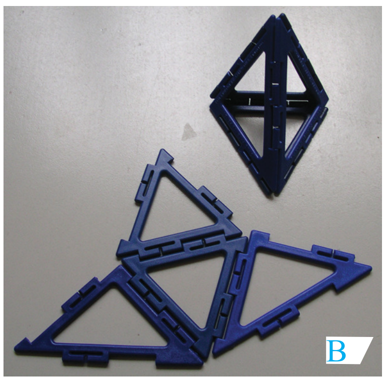
SCHEDA D - *PUZZLE* DI POLIEDRI

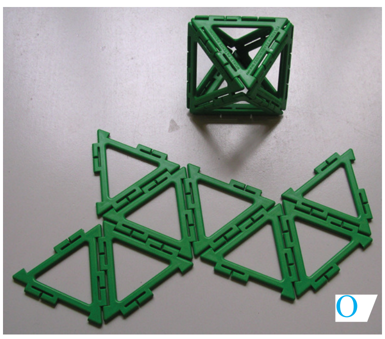
Con il materiale che trovate sul tavolo costruite cinque diversi poliedri, aiutandovi con gli schemi qui sotto che indicano per ciascun solido un suo sviluppo piano:

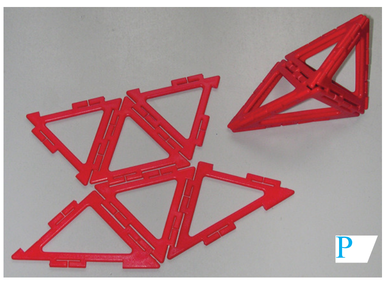


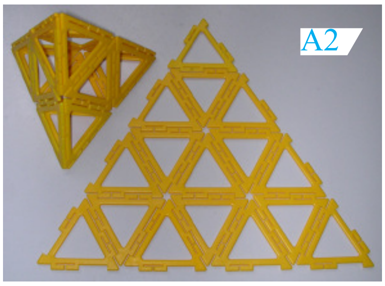
Per iniziare l'attività, ogni gruppo dovrà avere a disposizione il materiale utile (ovvero 34 triangoli equilateri e 4 triangoli rettangoli isosceli) per costruire i cinque oggetti richiesti come nelle foto seguenti:











Osservando gli oggetti che avete costruito provate a rispondere alle seguenti domande:
ATTENZIONE: in queste domande vi si chiede solo una stima dei volumi, non dovete usare alcuno strumento e neppure formule!
In questa prima fase, chiediamo ai ragazzi semplicemente una valutazione "a occhio": potete per esempio (se c'è qualche esitazione) suggerire loro di immaginare che siano fatti di cioccolata e in tal caso quale pezzo sceglierebbero per primo… Lo scopo dell'attività sarà poi proprio quello di cercare dei ragionamenti che possano confermare (o smentire) queste prime valutazioni.

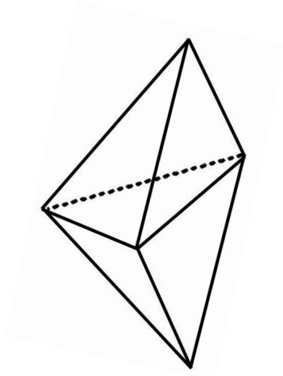
- Il volume del poliedro **B** è maggiore, minore o uguale a quello del poliedro **A**? *Uguale.*
- Se avete risposto più grande\più piccolo sapreste anche stimare di quanto è più grande\più piccolo? Per esempio, più o meno del doppio\della metà?
- Il volume del poliedro **P** è maggiore, minore o uguale a quello del poliedro **A**? *Maggiore.*
- Se avete risposto più grande\più piccolo sapreste anche stimare di quanto è più grande\più piccolo? Per esempio, più o meno del doppio\della metà? *Il volume di P è il doppio di quello di A.*
- Il volume del poliedro **O** è maggiore, minore o uguale a quello del poliedro **A**? *Maggiore.*
- Se avete risposto più grande\più piccolo sapreste anche stimare di quanto è più grande\più piccolo? Per esempio, più o meno del doppio\della metà? *Il volume di O è 4 volte tanto quello di A.*
- Il volume del poliedro **A2** è maggiore, minore o uguale a quello del poliedro **A**? *Maggiore.*
- Se avete risposto più grande\più piccolo sapreste anche stimare di quanto è più grande\più piccolo? Per esempio, più o meno del doppio\della metà? *Il volume di A2 è 8 volte tanto quello di A.*

Decidiamo che il volume del tetraedro **A** misura **1** e facciamo un po' di *PUZZLE* di poliedri per verificare se le vostre risposte sono corrette: chiedete all'insegnante di darvi le istruzioni.

A questo punto l'insegnante darà ad ogni gruppo le schede con le istruzioni per realizzare i vari puzzle. Per la quantità di tessere di polydron *da consegnare a ciascun gruppo si vedano le "Istruzioni per l'utilizzo del materiale" contenute nel* kit.

Puzzle 1

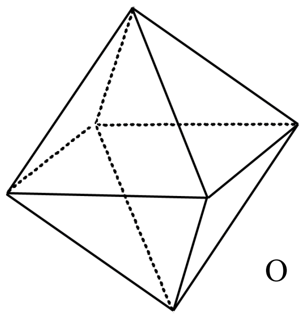
Provate ad accostare un tetraedro di tipo **A** e uno di tipo **B** per ottenere il poliedro **P**.
Ricordandovi che il volume del tetraedro **A** misura 1, quanto misura il volume del tetraedro **B**?
(*Un suggerimento*: *due piramidi che hanno la stessa base e la stessa altezza hanno anche lo stesso volume; se ci pensate, assomiglia un po' al fatto che due triangoli con la stessa base e la stessa altezza hanno anche la stessa area*)
E quanto misura il volume del poliedro **P**?
Il volume di B è 1, il volume di P è 2.



P

Puzzle 2

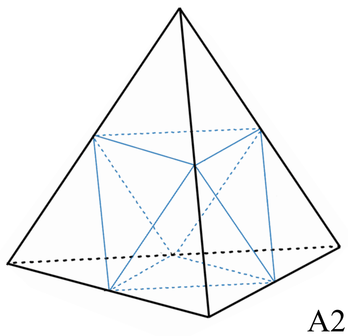
Provate ad accostare quattro copie di tetraedri di tipo **B** per ottenere l'ottaedro **O**.
Quanto misura il volume dell'ottaedro **O**?
Il volume di O è 4.



O

Puzzle 3

Provate ad accostare l'ottaedro regolare **O** e quattro copie del tetraedro regolare **A** per ottenere il tetraedro **A2**.
Quanto misura il volume del tetraedro **A2**?
Il volume di A2 è 8.

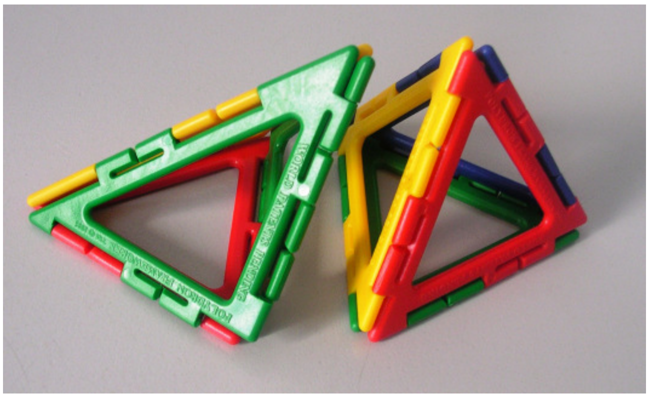


A2

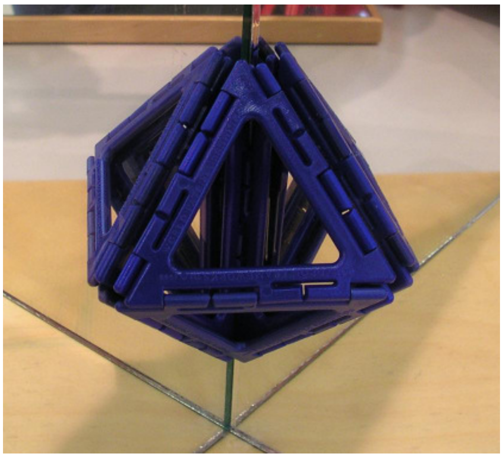
Puzzle 4

Provate ad accostare quattro copie del poliedro **P** per ottenere il tetraedro **A2**.
Potete usare questo puzzle per controllare il valore che avete trovato con il puzzle precedente per il volume del tetraedro **A2**?

Una soluzione per il primo puzzle è la seguente:

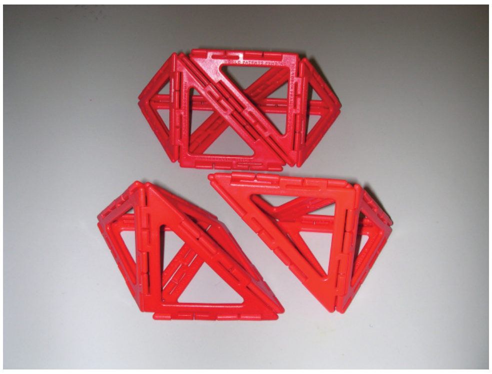


Una soluzione per il secondo puzzle si può anche visualizzare appoggiando il tetraedro B a due specchi ortogonali (lungo le due facce di B che sono fra loro ortogonali)

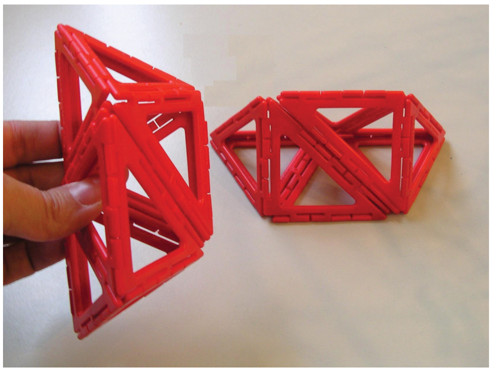


Ecco invece la soluzione per il terzo puzzle proposto:

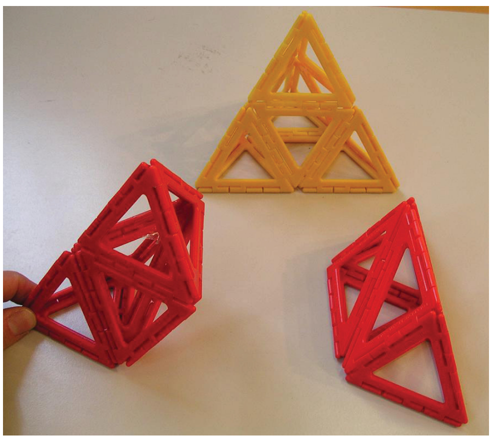
Fra i vari puzzle proposti, quello che può presentare maggiori difficoltà è il quarto, per il quale potete vedere una soluzione in **1073**. *Un "trucco" per aiutarsi nella soluzione è cominciare ad accoppiare due pezzi P in modo tale da far comparire una* *faccia quadrata (che si forma con due delle facce a forma di triangolo rettangolo isoscele), come nella foto qui di seguito:*



Accoppiamo poi anche gli altri due pezzi P.



È ora abbastanza facile vedere come si può completare il puzzle, unendo le facce quadrate dei due pezzi ottenuti, come si vede in figura. Questo può quindi essere utilizzato anche per mettere in evidenza il fatto che un tetraedro regolare può essere tagliato in modo tale che la sezione visibile sia un quadrato.



Nei puzzle gli alunni trovano, oltre alle istruzioni, alcune domande finalizzate a guidarli nel "tradurre" in uguaglianze tra volumi ciò che osservano costruendo i *puzzle. Già dovrebbero aver visto dal primo puzzle che:*

vol(B)=vol(A)=1

e

vol(P)=vol(A)+vol(B)=2

Dagli altri puzzle si ottengono poi le uguaglianze:

vol(O)=4
vol(A2)=vol(O)+4vol(A)=8

oppure

vol(A2)=4vol(P)=8

Osserviamo che questi problemi sfiorano alcune questioni delicate, che certamente non è il caso di far emergere con i ragazzi, ma di cui è bene che l'insegnante sia consapevole.
Confrontiamo le due uguaglianze **vol(O)=4vol(B)** *e* **vol(O)=4vol(A)**. *Nel primo caso possiamo costruire un ottaedro O accostando 4 tetraedri B; nel secondo caso, invece, ciò non è possibile. Si potrebbe pensare che, se anche questo non è possibile, si potranno dividere i tetraedri A in pezzettini più piccoli, con i quali sia possibile ricostruire l'ottaedro O. Però nemmeno questo è possibile, anche se questa impossibilità è abbastanza complessa da giustificare.*
Mentre due poligoni sono equidecomponibili se e solo se hanno la stessa area, l'analoga affermazione sui volumi è falsa per i poliedri. Resta vero naturalmente che se i poliedri sono equidecomponibili allora hanno lo stesso volume; è possibile però che, come nel caso sopra presentato, due poliedri abbiano lo stesso volume, ma non siano equidecomponibili.

Riassumiamo i risultati ottenuti nei vari puzzle nella seguente tabella:

Poliedri	Volume
A	1
A2	8
B	1
O	4
P	2

La stima che avevate dato all'inizio sul volume dei vari poliedri corrisponde a quella che avete dato ora?

☐ SÌ ☐ NO

Se avete risposto no, che cosa vi aveva tratto in inganno?
Come approfondimento sul tema cui è dedicata questa attività, suggeriamo altri due puzzle, più difficili ma molto affascinanti.

Puzzle 5

Provate ad accostare ad ogni faccia di un ottaedro di tipo **O** un tetraedro di tipo **A**.

Riuscireste a ricostruire il poliedro che avete ottenuto con le tessere di *polydron* che avete a disposizione? Dategli un nome!

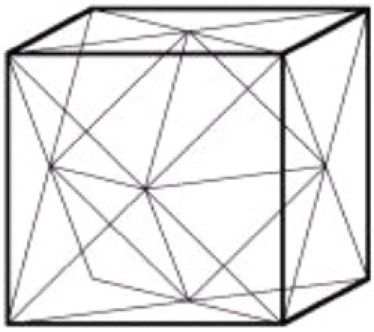
Vedete dei tetraedri regolari grandi **A2** in questo poliedro?

Se, come prima, decidiamo che il volume di un tetraedro di tipo **A** misura 1, quanto misura il volume di questo nuovo poliedro?

Puzzle 6

Provate ad accostare il poliedro costruito nel Puzzle 5 e 12 tetraedri di tipo **B** per ottenere un cubo.

Se come prima decidiamo che il volume di un tetraedro di tipo **A** misura 1, quanto misura il volume del cubo ottenuto?



Per poter fare i due puzzle il materiale necessario per ogni gruppo è:

- *48 triangoli equilateri piccoli*
- *24 triangoli rettangoli isosceli*

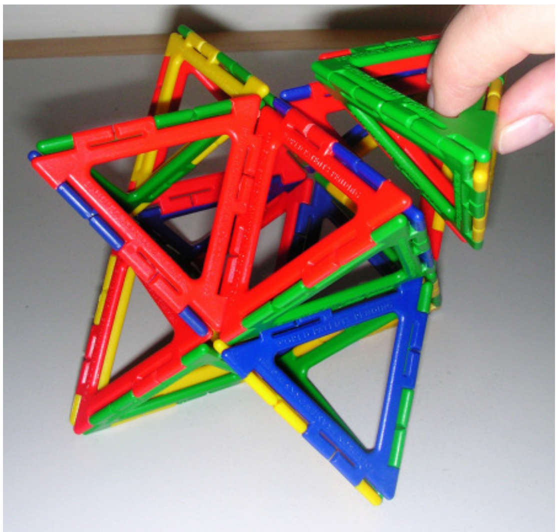
Il poliedro costruito con il primo puzzle è chiamato "stella octangula", ma preferiamo che i ragazzi siano totalmente liberi di scegliere il nome che preferiscono.

L'immagine precedente è una rappresentazione virtuale del poliedro che si ottiene dal puzzle, ed è anche molto utile per vedere i due poliedri ***A2*** *che compongono la stella octangula.*
Anche in questi puzzle gli alunni trovano, oltre alle istruzioni, delle domande finalizzate a guidarli nel "tradurre" in uguaglianze tra volumi quello che osservano

costruendo i puzzle. Scopriranno quindi che

vol(stella)=vol(O)+8vol(A)=4+8=12

Di nuovo stanno usando come unità di misura dei volumi il volume del poliedro **A**, *scelta che consigliamo di sottolineare nuovamente.*
Per quanto riguarda le soluzioni, per il secondo puzzle la foto seguente può essere di aiuto:



Il puzzle si costruisce abbastanza facilmente posizionando la stella in maniera che appoggi su quattro sue "punte" in modo stabile e facendo coincidere le due facce a forma di triangolo equilatero del poliedro **B** *con due facce di due "punte" adiacenti nella stella (vedi foto).*
Per quanto riguarda il volume, analogamente ai casi precedenti, possiamo affermare che:

vol(cubo)=vol(stella)+12vol(B)=12+12=24

Osservazione: nel CD-rom si trovano i disegni degli sviluppi dei cinque poliedri coinvolti nei primi 4 puzzle. Naturalmente, se si vogliono utilizzare questi poliedri per i puzzle, occorrerà nella stampa controllare che i lati dei triangoli equilateri piccoli siano di uguale lunghezza nei diversi sviluppi.

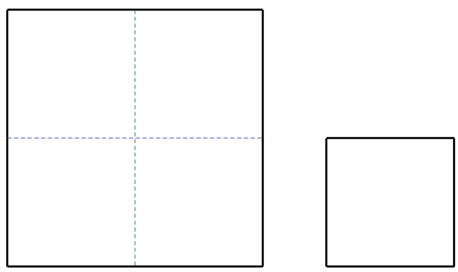
SCHEDA E - PITAGORA E LA SIMILITUDINE

Le attività proposte sono strutturate nel modo seguente:
FASE 1: si consegnano agli alunni i problemi con i puzzle. Ciascun puzzle comprende diverse attività che l'insegnante potrà stampare sotto forma di schedine indipendenti fra loro, per avere la possibilità di scegliere quanti e quali ritiene utile sottoporre ai ragazzi.
Sono disponibili 9 puzzle, fra questi si suggerisce di utilizzare i puzzle 1, 2, 3, 4, 5 e 6 con gli alunni che non hanno ancora affrontato in classe il Teorema di Pitagora e i puzzle 1, 2, 7, 8 e 9 con gli alunni che hanno già affrontato in classe il Teorema di Pitagora.
FASE 2: si consegna agli alunni la "scheda di lavoro" con funzione riassuntiva e di approfondimento.
N.B.: le figure per i puzzle n.3,4,5,6 e 7 sono disponibili in due versioni: sulla scheda per i ragazzi si trovano le figure "bianche" per le quali il puzzle risulta più difficile. Sul CD sono disponibili le figure con una griglia (di quadrati o di triangoli equilateri a seconda dei casi) che rende la soluzione del problema assai più facile. Lasciamo decidere agli insegnanti quale delle due versioni usare a seconda della classe.

Puzzle 1

a. Avete a disposizione **quattro** tessere di forma **quadrata**, usatele per ottenere una tessera più grande con la stessa forma. Come avete fatto?

Tenete traccia della soluzione nel disegno qui sotto.



Fissiamo come unità di misura per le lunghezze il lato dei quadrati piccoli, cioè decidiamo che il lato di tali quadrati misura 1.

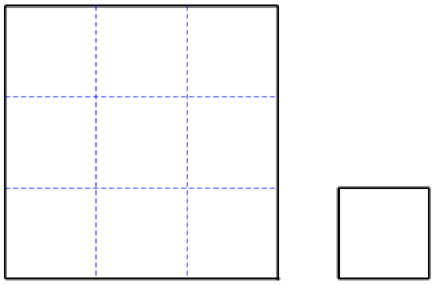
Qual è il rapporto tra i lati corrispondenti del quadrato piccolo e del quadrato grande che avete ottenuto?

Nelle cartine geografiche potete trovare per esempio l'indicazione 1:10.000. Questa scrittura significa che, fissata un'unità di misura **di lunghezza**, le distanze che misurano 1 sulla cartina misureranno 10.000 nella realtà. Se in questo caso il quadrato grande rappresenta un territorio di cui il quadrato piccolo è la cartina geografica, possiamo scrivere che questa cartina è in rapporto:

1 : *2*

b. Avete a disposizione **nove** tessere di forma **quadrata**, usatele per ottenere una tessera più grande con la stessa forma. Come avete fatto?

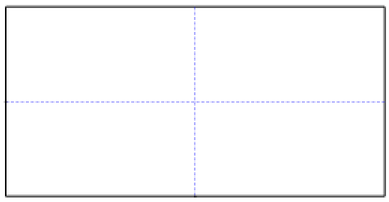
Tenete traccia della soluzione nel disegno qui sotto.



Qual è il rapporto tra i lati corrispondenti del quadrato piccolo e del quadrato grande che avete ottenuto?

1 : *3*

c. Riuscite a usare **quattro rettangoli** uguali fra loro per ottenere un rettangolo più grande con la stessa forma?



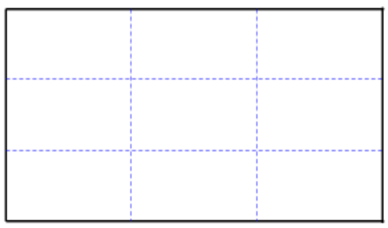
Si può far osservare ai ragazzi che il problema assegnato (accostare 4 rettangoli piccoli per formarne uno grande della stessa forma) è sostanzialmente equivalente al problema di dividere il rettangolo in figura in 4 rettangoli della stessa forma.

La stessa situazione si incontrerà anche negli altri puzzle, e se i ragazzi si rendono conto di questa equivalenza potrebbero anche ragionare direttamente sul disegno (disponibile nel CD).

Qual è il rapporto tra i lati corrispondenti del rettangolo piccolo e del rettangolo grande che avete ottenuto?

1 : *2*

d. E con **nove rettangoli** uguali fra loro riuscite a ottenere un rettangolo più grande con la stessa forma?



Dividendo ogni lato del rettangolo grande in ***tre*** *parti uguali come in figura, si ottengono 9 rettangoli uguali fra loro e simili al rettangolo di partenza.*

Qual è il rapporto tra i lati corrispondenti del rettangolo piccolo e del rettangolo grande che avete ottenuto?

1 : *3*

e. E con **sedici rettangoli** uguali fra loro riuscite a ottenere un rettangolo più grande con la stessa forma?

Come sopra, basta dividere ogni lato del rettangolo grande in ***quattro*** *parti uguali.*

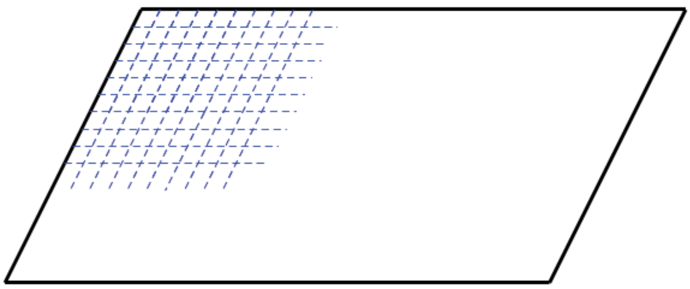
Qual è il rapporto tra i lati corrispondenti del rettangolo piccolo e del rettangolo grande che avete ottenuto?

1 : *4*

f. Riuscireste a fare la stessa cosa con un parallelogrammo?

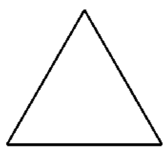
I puzzle realizzati con i quadrati e con i rettangoli possono essere ottenuti in generale, con il medesimo procedimento, con un qualsiasi parallelogrammo. Infatti basta dividere ogni lato del parallelogrammo in k *segmenti uguali e procedendo come in figura si divide il parallelogrammo in* k^2 *parallelogrammi simili ad esso con rapporto di similitudine* $1:k$*. Ovviamente non ci aspettiamo che i ragazzi rispondano con un grado così elevato di generalizzazione, ma è importante che si rendano conto che i ragionamenti fatti fino ad ora sono validi più in generale.*

Potete rispondere aiutandovi con il disegno qui sotto.

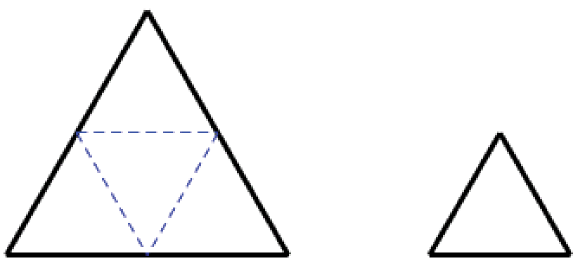


Puzzle 2

a. Avete a disposizione **quattro** tessere con la forma di **triangolo equilatero**; usatele per ottenere una tessera più grande con la stessa forma. Come avete fatto?



Per rispondere potete aiutarvi con il disegno qui sotto.



Fissiamo come unità di misura il lato di questi triangoli piccoli, cioè decidiamo che il lato dei triangoli piccoli misura 1.

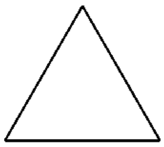
Scrivete sul disegno la misura degli altri lati della tessera e anche quelli del triangolo grande che avete costruito con il puzzle.

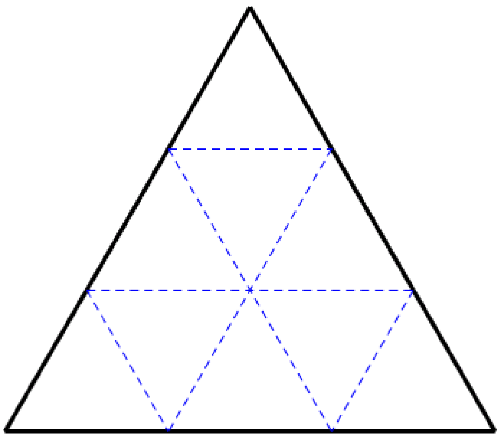
La risposta è quasi ovvia, ma il nostro intento è che riconoscano la forma della tessera: è un triangolo equilatero, quindi tutti i lati misurano **1**.

Qual è il rapporto tra i lati corrispondenti di questo triangolo e del triangolo grande che avete ottenuto?

1 : *2*

b. Avete a disposizione **nove** tessere con la forma di **triangolo equilatero**, usatele per ottenere una tessera più grande con la stessa forma. Come avete fatto? Per rispondere potete aiutarvi con il disegno qui sotto.





Scrivete sul disegno la misura di tutti i lati del triangolo grande che avete costruito con il puzzle.

Qual è il rapporto tra i lati corrispondenti del triangolo piccolo e del triangolo grande che avete ottenuto?

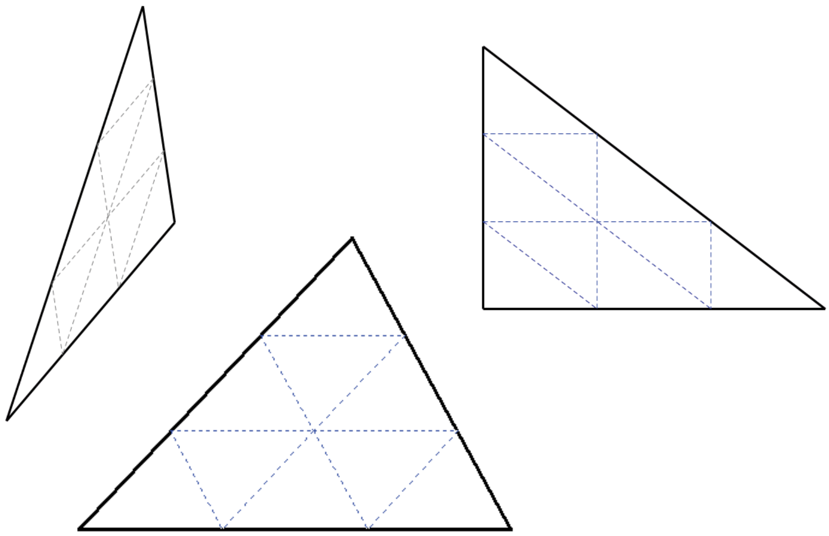
1 : *3*

c. Riuscite a usare **nove** triangoli con un'altra forma (cioè non triangoli equilateri) per ottenere un triangolo più grande con la stessa forma di quello da cui siete partiti? *Un suggerimento: la soluzione non è poi tanto differente da quella trovata nel punto precedente!*

Provate a dividere i triangoli qui sotto in nove triangoli più piccoli con la stessa forma. Nel primo caso vi abbiamo aiutato noi.

Così come, per i quesiti del puzzle 1, la stessa soluzione trovata per i quadrati e i rettangoli andava bene anche per parallelogrammi generici, anche in

questo caso la soluzione ottenuta per i triangoli equilateri funziona anche in generale, con il medesimo procedimento, con un qualsiasi triangolo. Infatti dividendo ogni lato in k *segmenti uguali e tracciando dai loro estremi le rette parallele agli altri due lati si divide un qualsiasi triangolo in* k^2 *triangoli simili ad esso con rapporto di similitudine* 1:k.
Anche in questo caso non ci aspettiamo che i ragazzi rispondano con un grado così elevato di generalizzazione, ma è importante che si rendano conto che i ragionamenti fatti fino ad ora sono validi più in generale.



Qual è il rapporto tra i lati corrispondenti del triangolo piccolo e del triangolo grande per ciascuno dei disegni precedenti?

1 : *3*

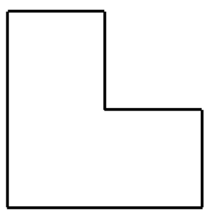
d. E come fareste a costruire un triangolo più grande con la stessa forma partendo da **sedici triangoli** uguali fra loro? *Come punto c)*

Qual è il rapporto tra i lati corrispondenti del triangolo piccolo e del triangolo grande che otterreste?

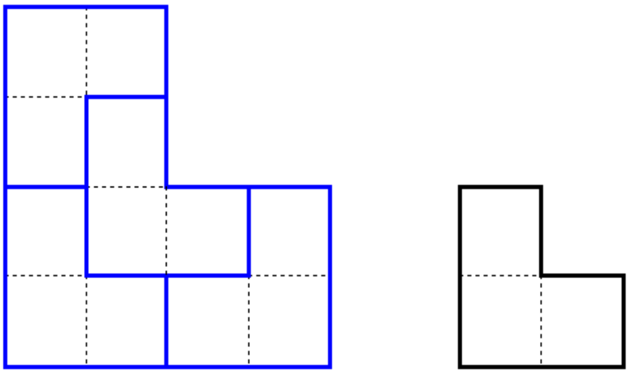
1 : *4*

Puzzle 3

Avete a disposizione **quattro** tessere che hanno per forma l'**esagono** qui in figura, usatele per ottenere una tessera più grande con la stessa forma. Come avete fatto?



Per rispondere potete aiutarvi con il disegno qui sotto.



Fissiamo come unità di misura il lato corto degli esagoni piccoli cioè decidiamo che esso misura 1.

Quanto misura il lato lungo dell'esagono piccolo ? *2*

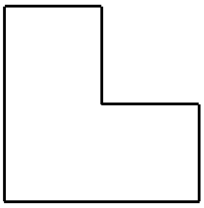
Quanto misurano i lati (corti e lunghi) dell'esagono grande? *2 e 4.*

Qual è il rapporto tra i lati corrispondenti dell'esagono piccolo e dell'esagono grande che avete ottenuto?

1 : *2*

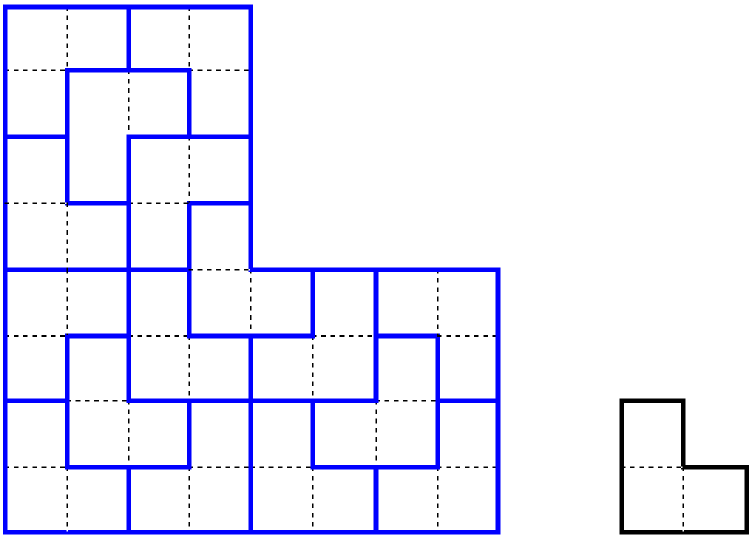
Puzzle 4

Usate **sedici** tessere con questa forma **esagonale** per ottenere una mattonella più grande con la stessa forma.



Come avete fatto?

Per rispondere potete aiutarvi con il disegno qui sotto.



Quanto misurano i lati dell'esagono grande? *Lato corto: 4; lato lungo: 8.*

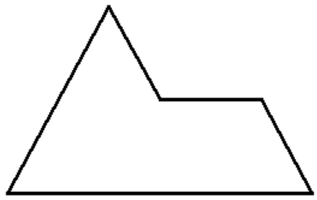
Qual è il rapporto tra i lati corrispondenti dell’esagono piccolo e dell’esagono grande che avete ottenuto?

1 : *4*

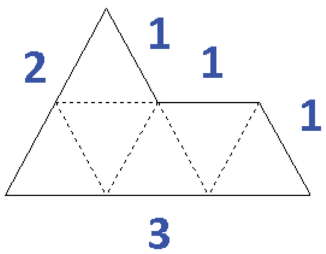
Puzzle 5

Usate **quattro** tessere con questa forma **pentagonale** per ottenere una mattonella più grande con la stessa forma.

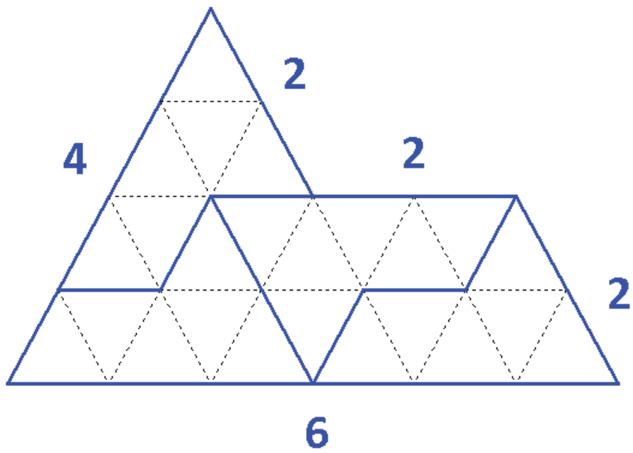
Come avete fatto?



Per rispondere potete aiutarvi con i disegni A e B:



A



B

Quanto misurano i lati del pentagono piccolo? *Vedi disegno.*

Un suggerimento: ricordatevi che abbiamo fissato come unità di misura per le lunghezze il lato dei triangoli equilateri.

Quanto misurano invece i lati del pentagono grande? *Vedi disegno.*

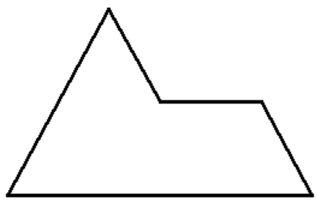
Qual è il rapporto tra i lati corrispondenti dei due pentagoni?

1 : *2*

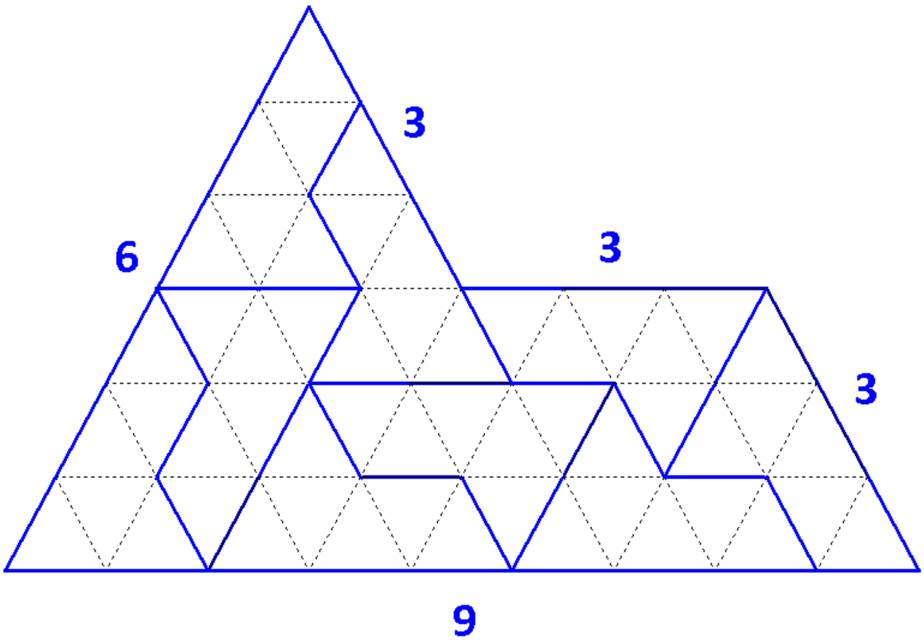
Puzzle 6

Usate **nove** tessere con questa forma per ottenere una mattonella più grande con la stessa forma.

Come avete fatto?



Per rispondere potete aiutarvi con il disegno qui sotto.



Quanto misurano i lati di questo pentagono più grande?

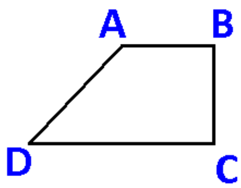
Vedi disegno.

Qual è il rapporto tra i lati corrispondenti dei due pentagoni?

1 : *3*

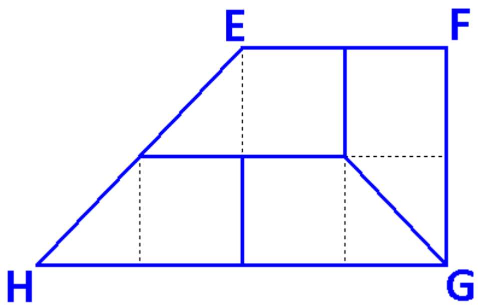
Puzzle 7

a. Avete a disposizione **quattro** tessere con la forma di **trapezio rettangolo**, usatele per ottenere una tessera più grande con la stessa forma.



Come avete fatto?

Per rispondere potete aiutarvi con il disegno qui sotto.



Fissiamo come unità di misura la base minore di questi trapezi, cioè decidiamo che essa misura 1.

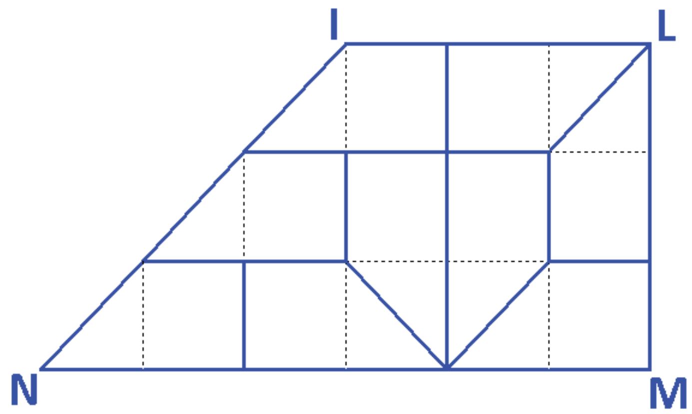
Scrivete sul disegno la misura degli altri lati della tessera e dei lati del trapezio grande che avete costruito con il puzzle. (*Un suggerimento: Pitagora!*)

$AB = 1$; $BC = 1$; $DC = 2$; $AD = \sqrt{2}$
$EF = 2$; $FG = 2$; $HG = 4$; $EH = 2\sqrt{2}$

Qual è il rapporto tra i lati corrispondenti dei due trapezi?

1 : *2*

b. Avete a disposizione **nove** tessere con la forma di **trapezio rettangolo**, usatele per ottenere una tessera più grande con la stessa forma.
Come avete fatto?
Per rispondere potete aiutarvi con il disegno qui sotto.



Scrivete sul disegno la misura di tutti i lati del trapezio grande che avete costruito con il puzzle.

$IL = 3$; $LM = 3$; $NM = 6$; $NI = 3\sqrt{2}$

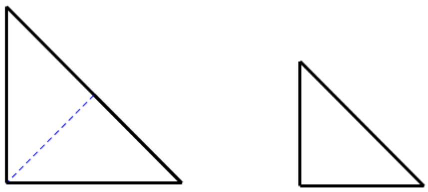
Qual è il rapporto tra i lati corrispondenti dei due trapezi?

1 : *3*

Puzzle 8

Avete a disposizione **due** tessere con la forma di **triangolo rettangolo isoscele**, usatele per ottenere una tessera più grande con la stessa forma. Come avete fatto?

Per rispondere potete aiutarvi con il disegno qui sotto.



Fissiamo come unità di misura i cateti di questi triangoli, cioè decidiamo che essi misurano 1.

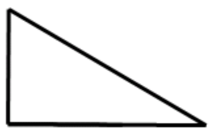
Scrivete sul disegno la misura degli altri lati della tessera e anche quelli del triangolo grande che avete costruito con il puzzle.

Lati triangolo piccolo: 1,1,√2. Lati triangolo grande: √2,√2,2

Qual è il rapporto tra i lati corrispondenti di questo triangolo e del triangolo grande che avete ottenuto?

1 : *√2*

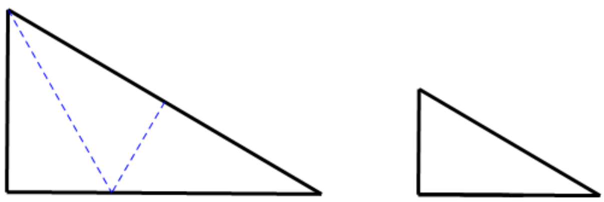
Puzzle 9



Avete a disposizione **tre** tessere con la forma di **triangolo rettangolo**, usatele per ottenere una tessera più grande con la stessa forma.

Come avete fatto?

Per rispondere potete aiutarvi con il disegno qui sotto.



Fissiamo come unità di misura l'ipotenusa di questi triangoli, cioè decidiamo che l'ipotenusa misura 1.

Scrivete sul disegno la misura degli altri lati della tessera (*un suggerimento: provate ad accostare due tessere per il cateto lungo*) e anche quelli del triangolo grande che avete costruito con il puzzle.

Si tratta di un triangolo di angoli 30°, 60°, 90°: i lati misureranno quindi 1/2, √3/2, 1, mentre quelli del triangolo grande misurano rispettivamente √3/2, 3/2, √3.

Qual è il rapporto tra i lati corrispondenti di questo triangolo e del triangolo grande che avete ottenuto?

1 : *√3*

SCHEDA E – SCHEDA DI LAVORO

Tutti i puzzle che avete realizzato ricostruiscono una figura più grande con un certo numero di figure più piccole. In ogni puzzle le figure coinvolte sono simili tra loro e la più grande è proprio un ingrandimento della più piccola.
In un ingrandimento, il rapporto fra una lunghezza misurata nella figura più grande (per esempio la lunghezza di un lato) e la lunghezza corrispondente nella figura più piccola è sempre lo stesso. Per esempio, in un ingrandimento in scala 1:2 questo rapporto vale sempre 2. E, viceversa, vale sempre 1/2 il rapporto fra una lunghezza misurata nella figura più piccola e la lunghezza corrispondente nella figura più grande.
Provate a riassumere i vari risultati nella seguente tabella:

È importante far osservare di volta in volta agli alunni la scelta dell'unità di misura per l'area, che nel nostro caso è la tessera più piccola del singolo puzzle (e quindi cambierà di volta in volta).

Puzzle N.	N. tessere	Rapporto di scala	Rapporto fra l'area della figura più piccola e l'area della figura più grande
1a	*4*	*1:2*	*1:4*
1b	*9*	*1:3*	*1:9*
1c	*4*	*1:2*	*1:4*
1d	*9*	*1:3*	*1:9*
1e	*16*	*1:4*	*1:16*
2a	*4*	*1:2*	*1:4*
2b	*9*	*1:3*	*1:9*
2c	*9*	*1:3*	*1:9*
2d	*16*	*1:4*	*1:16*
3	*4*	*1:2*	*1:4*
4	*16*	*1:4*	*1:16*
5	*4*	*1:2*	*1:4*
6	*9*	*1:3*	*1:9*
7a	*4*	*1:2*	*1:4*
7b	*9*	*1:3*	*1:9*
8	*2*	$1:\sqrt{2}$	*1:2*
9	*3*	$1:\sqrt{3}$	*1:3*

Che relazione c'è tra il rapporto di scala (cioè il rapporto fra lati corrispondenti) e il rapporto fra le aree?
I ragazzi dovrebbero accorgersi leggendo le ultime due colonne della tabella che il rapporto tra le aree di due figure simili è il quadrato del rapporto di similitudine, ovvero se il rapporto di similitudine è 1:k *il rapporto tra le aree sarà* $1:k^2$.

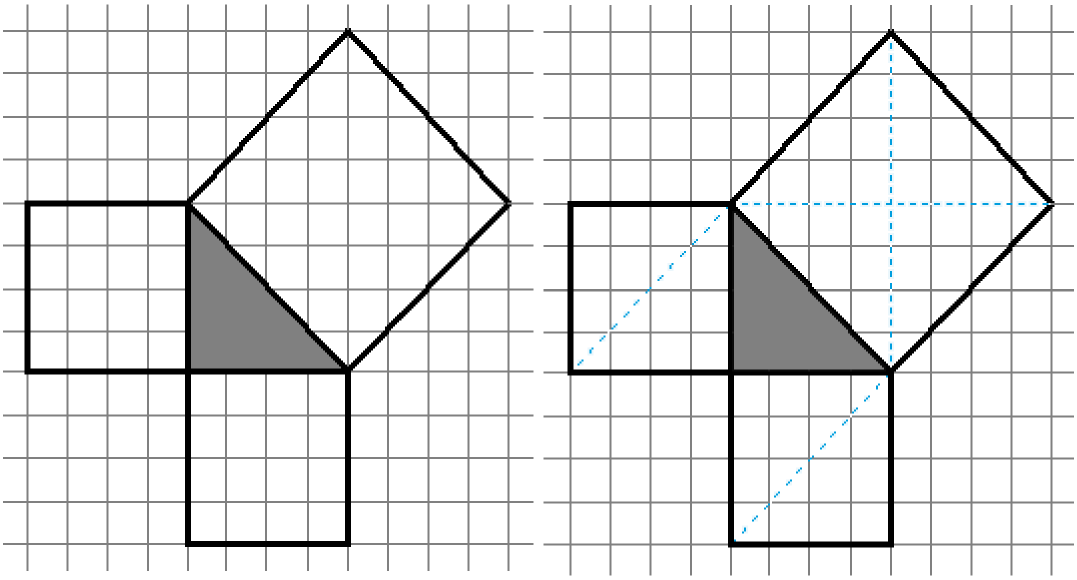
Chiedete ora all'animatore le tessere quadrate.

Fissiamo come unità di misura per le lunghezze il lato di questi quadrati, cioè decidiamo che esso misura 1.
Dato che non si riesce (avete provato?) a usare due tessere a forma di quadrato per ottenerne una più grande ma con la stessa forma, si può provare a suddividere i due quadrati in tessere più piccole e usare queste per comporre il quadrato più grande.
Riuscireste a ricostruire due quadrati di lato 1 con alcune delle altre tessere che avete sul tavolo?

SÌ NO

Se avete risposto di sì, riuscireste a costruire un quadrato più grande utilizzando tutte le tessere che vi servono per costruire due quadrati piccoli?
Come avete fatto?

Per rispondere potete aiutarvi con il disegno qui sotto.



Il puzzle che avete realizzato vi può suggerire come rispondere alla domanda:

- qual è il rapporto tra le aree delle tessere quadrate di lato 1 e quella del quadrato grande che avete ottenuto?

1 : *2*

La figura precedente e lo studio della tabella che avete compilato prima vi possono aiutare a rispondere alla seguente domanda:

- qual è il rapporto tra i lati delle tessere quadrate di lato 1 e quelli del quadrato grande che avete ottenuto?

1 : *√2*

I ragazzi che non conoscono il teorema di Pitagora qui risponderanno esclusivamente basandosi sul risultato appena "scoperto" riguardante il legame tra il rapporto di similitudine e il rapporto tra le aree. I ragazzi che conoscono Pitagora possono invece rispondere anche osservando che il triangolo centrale della figura è un triangolo (lo stesso studiato in uno dei puzzle) di lati 1,1,√2.

Dato che non si riesce (avete provato?) a usare due tessere a forma di triangolo equilatero per ottenerne una più grande ma con la stessa forma, anche in questo caso si possono suddividere i due triangoli equilateri in tessere più piccole e usare queste per comporre un triangolo equilatero più grande.
Questa volta vi diamo noi le tessere del puzzle!
Chiedete all'animatore di darvi i pezzi di puzzle e i tre disegni di triangoli equilateri di diverse dimensioni.

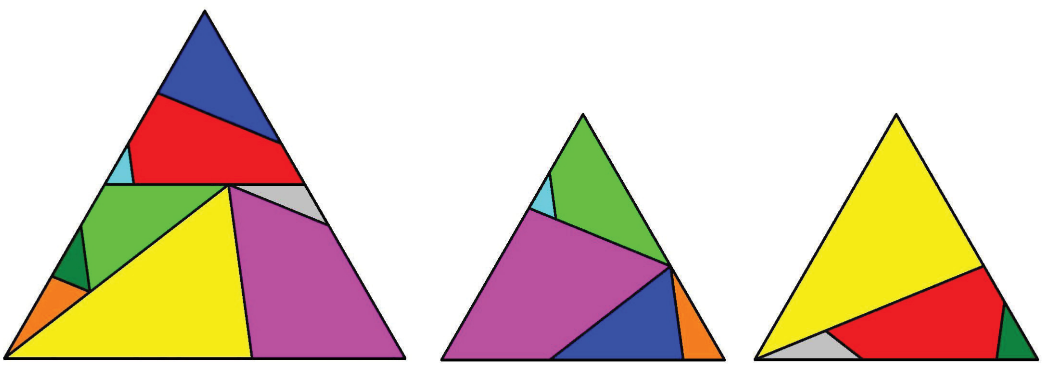
Riuscite a ricostruire i due triangoli equilateri più piccoli contemporaneamente con tutte le tessere del puzzle?

SÌ NO

Se avete risposto sì, con queste stesse tessere riuscireste a ricostruire il triangolo equilatero più grande?

SÌ NO

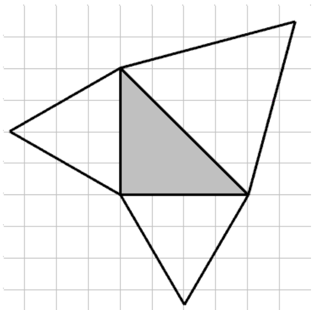
SOLUZIONE PUZZLE:



Il puzzle che avete realizzato vi può suggerire come rispondere alla seguente domanda:

- qual è il rapporto tra le aree del triangolo equilatero piccolo e quella del triangolo equilatero grande?

1 : *2*

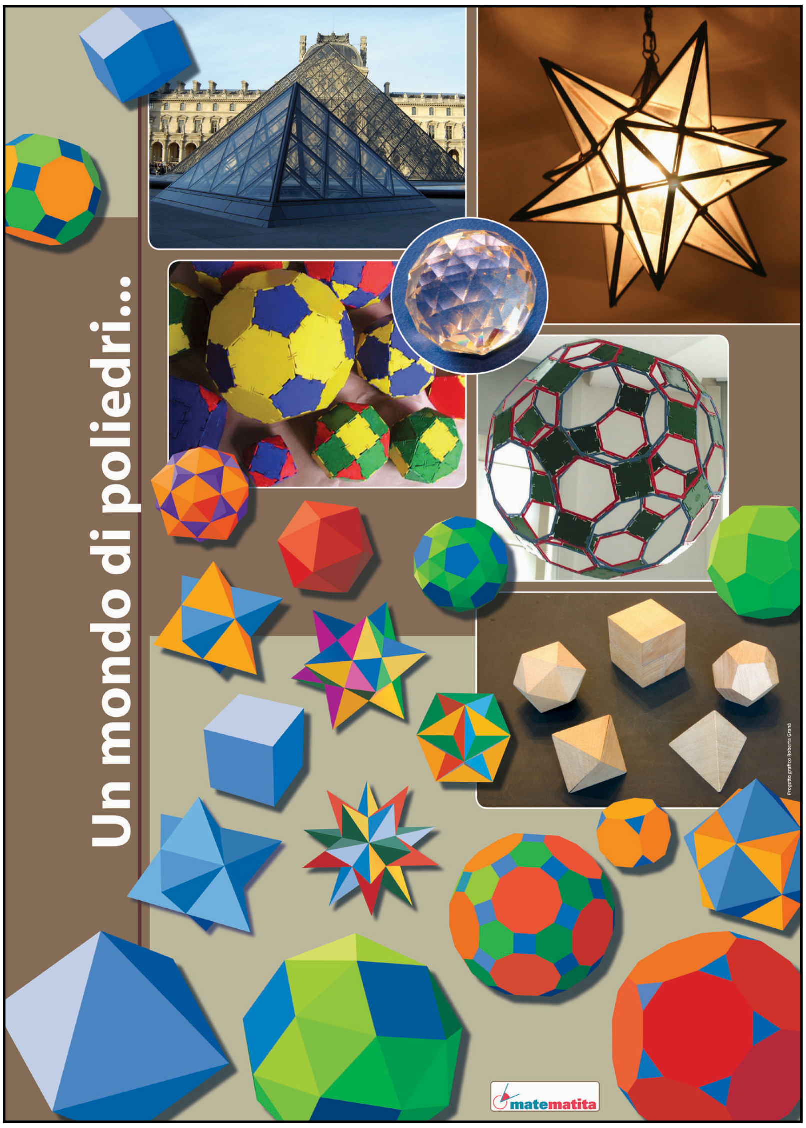


La figura qui accanto e lo studio della tabella che avete compilato prima vi possono aiutare a rispondere alla seguente domanda:

- qual è il rapporto tra i lati corrispondenti dei triangoli equilateri di lato 1 e del triangolo equilatero grande che avete ottenuto?

1 : $\sqrt{2}$

Anche in questo caso vale l'osservazione fatta per il puzzle precedente: i ragazzi che non conoscono il teorema di Pitagora qui risponderanno esclusivamente basandosi sul risultato appena "scoperto" riguardante il legame tra il rapporto di similitudine e il rapporto tra le aree.
I ragazzi che conoscono Pitagora possono invece rispondere anche osservando che il triangolo centrale della figura è un triangolo (lo stesso studiato in uno dei puzzle) di lati 1,1,$\sqrt{2}$.


Un mondo di poliedri...
matematita

LIBRI E SITI

1. Alcuni libri che ci sono stati utili

Il testo di riferimento per gli aspetti teorici sottostanti la costruzione del percorso del *kit* è:

Maria Dedò, *Forme*, Decibel, Zanichelli, 1999

In particolare i capitoli 3, 4, 5.

Per chi non ha paura dell'inglese, uno splendido libro è

Peter Cromwell, *Polyhedra*, Cambridge University Press, 1997

Non si tratta di un libro facile da leggere, ma è una vera miniera e se ne possono ricavare moltissimi spunti interessanti.

Un libro in italiano molto bello, che non riguarda solo i poliedri, è

Hugo Steinhaus, *Matematica per istantanee*, Zanichelli, 1994

In particolare nei capitoli 7 e 8 si trovano esempi legati al mondo dei poliedri.

Segnaliamo infine un omaggio a H.S.M. Coxeter

Siobhan Roberts, *Il re dello spazio infinito*, Rizzoli, 2006

Non si tratta di un libro di matematica: l'autore è un giornalista e tratteggia qui la figura di H.S.M. Coxeter, un matematico del '900 il cui nome è legato a tanti risultati anche sui poliedri.

2. Alcuni siti *web* dove si possono trovare spunti e idee sul tema dei poliedri

http://www.mathconsult.ch/showroom/unipoly/list-graph.html
un poster con tutti i poliedri uniformi (compresi quelli stellati)

http://www.atractor.pt/mat/Polied/poliedros-e.htm
una raccolta di rappresentazioni virtuali di poliedri

http://www.cs.mcgill.ca/~sqrt/unfold/unfolding.html
vi si trovano sviluppi (virtuali) di poliedri che si aprono e si chiudono

http://www.korthalsaltes.com/
vi si trovano gli sviluppi di un notevole numero di poliedri in una forma che si può scaricare e stampare per ricostruirli in cartoncino

E naturalmente anche il già citato sito “Immagini per la matematica” del Centro “matematita”:
http://www.matematita.it/materiale/
dove si può in particolare esplorare la sezione dedicata ai poliedri:
http://www.matematita.it/materiale/?p=cat&sc=272

Per continuare il discorso sui poliedri:

matematita

FASCICOLO INTRODUTTIVO al laboratorio *chiavi in mano*

DIAMO FORMA ALLA GEOMETRIA: REGOLARI O NO?

per la scuola secondaria di I grado

di Ombretta Locatelli e Alessandra Brena

REFERENZE FOTOGRAFICHE

Le immagini di pag. 7, 9, 12 e 28 sono di Roberta Granà.
Le immagini di pag. 13 sono di Francesca Lazzaroni.

Al *kit* è allegato il poster "Un mondo di poliedri..." (progetto grafico di Roberta Granà).