

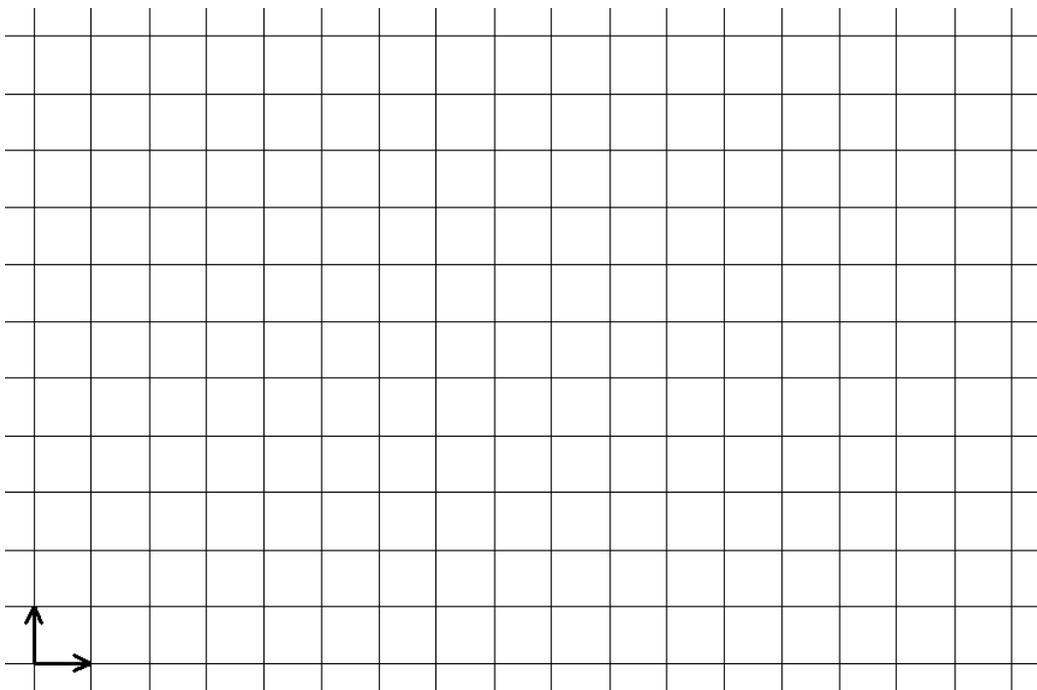


## SCHEDA M

### **MOSAICI**

#### CLASSIFICARE CON LA SIMMETRIA

Qui sotto avete una griglia, che rappresenta una normale quadrettatura, come quella dei quaderni a quadretti; nelle attività che seguono dovrete immaginare che essa si estenda al di fuori del foglio, all'infinito, ripetendosi sempre uguale:



In basso a sinistra sono segnate due frecce (due vettori); immaginate di chiudere gli occhi e che un vostro compagno muova la griglia con la traslazione corrispondente a uno di questi due vettori (cioè ogni punto  $P$  va a finire in un punto  $P'$  tale che il vettore  $PP'$  abbia la stessa lunghezza, lo stesso verso e la stessa direzione del vettore corrispondente a una delle due frecce in figura): quando riaprite gli occhi non ve ne accorgete.

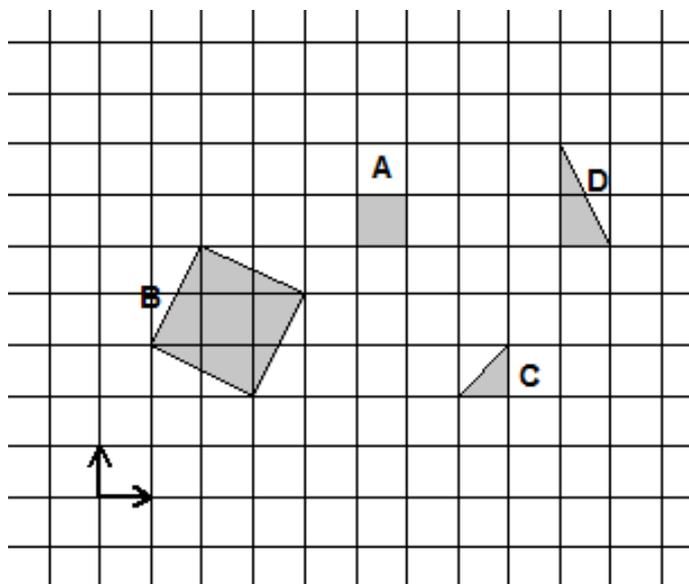
In realtà, questo non è del tutto vero se pensiamo al disegno qui sopra, perché vedreste mutata la posizione del bordo della griglia rispetto al foglio. Però vi abbiamo chiesto di immaginare la griglia illimitata, in tutte le direzioni: in tal caso proprio non ve ne accorgete.

Quali altri vettori, oltre a quelli individuati da un lato di un quadretto, corrispondono a traslazioni che non cambiano la griglia? Disegnatene (almeno) tre sulla griglia.

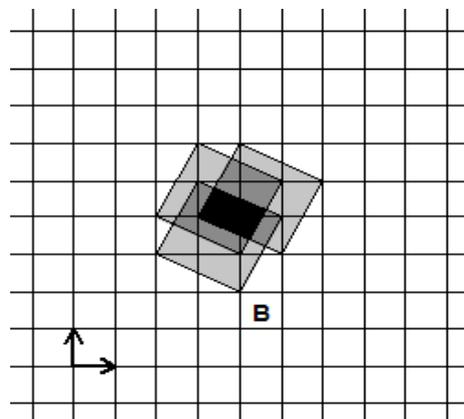
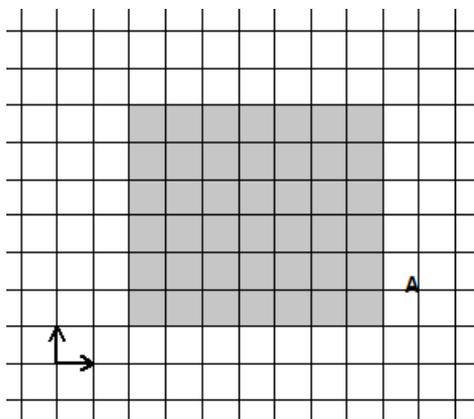
**UGUALI o DIVERSI**  
*Avvio all'astrazione*

Chiamiamo **MOSSA LEGITTIMA DI TIPO I** una qualunque traslazione che ottiene componendo come volete le traslazioni corrispondenti ai vettori segnati nell'angolo in basso a sinistra della quadrettatura. Per esempio, sono due mosse legittime di tipo I quella di spostare la griglia di 3 quadretti verso l'alto e di 5 verso sinistra oppure quella di spostare la griglia di 2 quadretti verso il basso e di 3 verso destra. Consideriamo ora alcune figure sulla griglia, come quelle qui sotto, e immaginiamo di applicare a una di queste forme **tutte** le possibili mosse legittime di tipo I; che cosa succede?

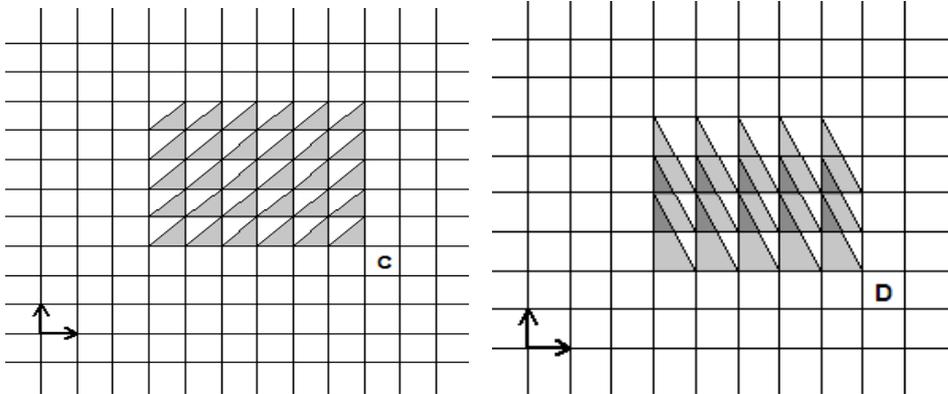
Otteniamo una famiglia di forme, tutte uguali fra loro, e può accadere che:



- A. queste forme ricoprono esattamente tutto il piano, senza sovrapposizioni e senza buchi (un esempio è il quadrato A in figura);
- B. le forme ricoprono tutto il piano, ma si accavallano (un esempio è il quadrato B);

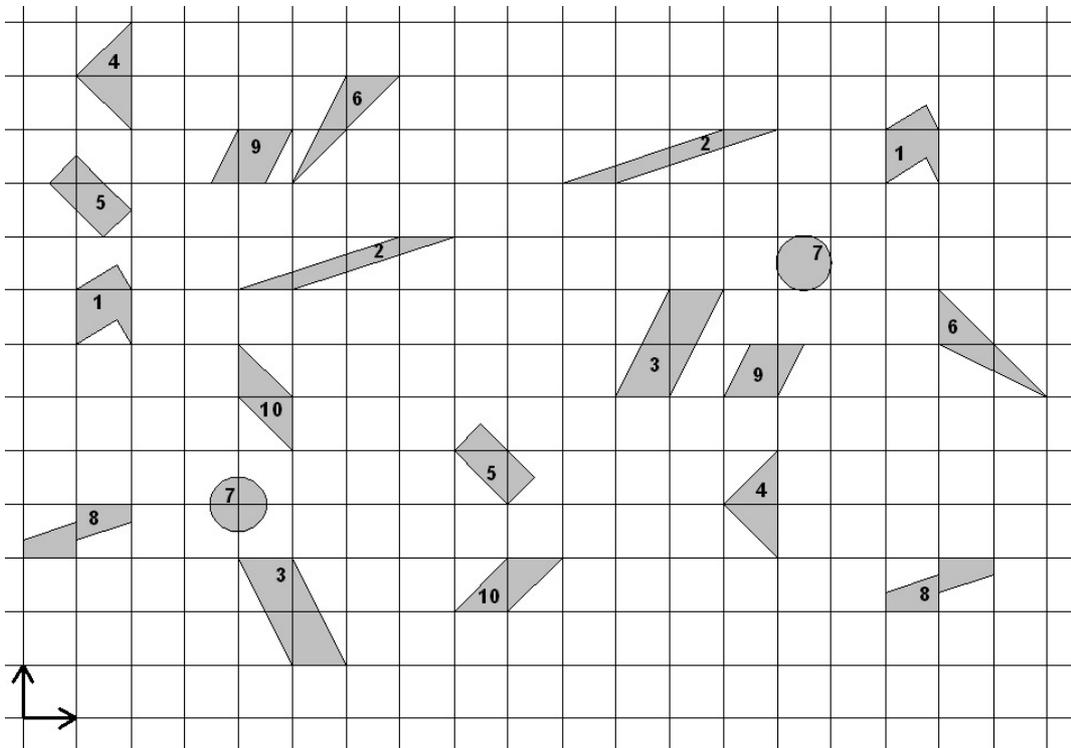


- C. le forme non si accavallano, ma lasciano dei buchi (un esempio è il triangolo C);
- D. le forme si accavallano in parte, ma lasciano anche dei buchi (un esempio è il triangolo D).



In quanto segue ci potrà far comodo chiamare una forma di tipo A (oppure B, C, D) se si comporta come l'esempio A qui sopra (ovvero, rispettivamente, B, C, D).

Nella griglia successiva trovate altre figure su cui vi porremo due domande.  
Fra le figure trovate alcuni poligoni, e anche un cerchio, ma potete sbizzarrirvi a aggiungere altre forme qualsiasi: basta che si tratti di sottoinsiemi del piano.



Ecco le due domande:

- ogni figura è ripetuta due volte: c'è una mossa legittima di tipo I che manda l'una nell'altra le due figure con lo stesso numero?

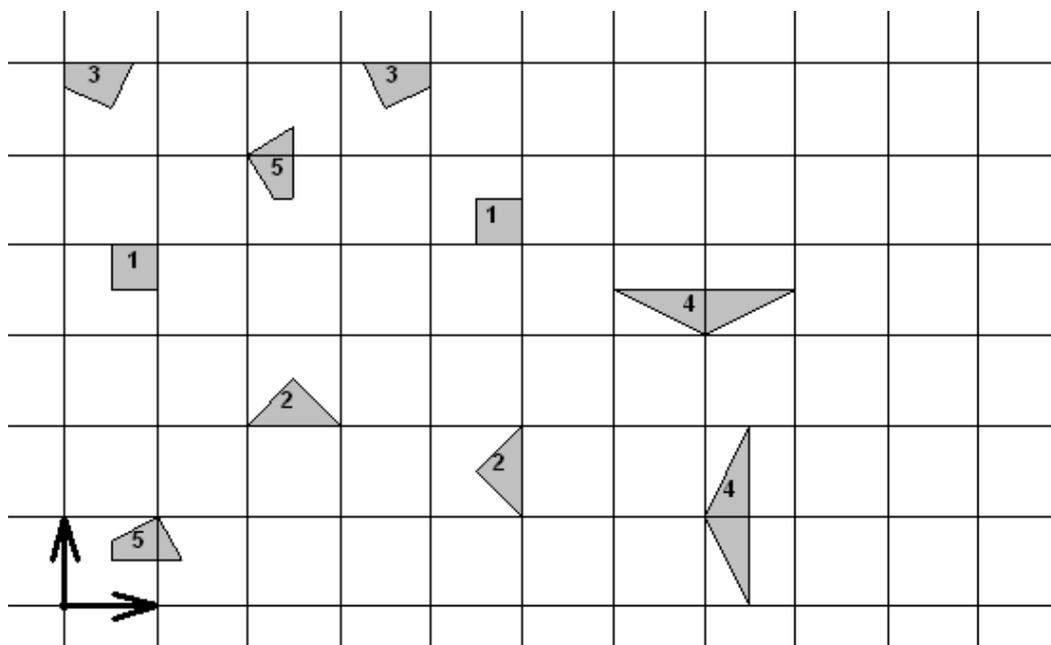
**UGUALI o DIVERSI**  
*Avvio all'astrazione*

	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>
<b>Si</b>										
<b>No</b>										

- sapreste decidere, per ciascuna di esse: è di tipo A, B, C oppure D?

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>

Non ci sono solo le traslazioni che fissano la quadrettatura, ma anche per esempio le rotazioni: allarghiamo allora il parco delle mosse legittime aggiungendo le rotazioni di  $90^\circ$  intorno ai vertici della quadrettatura, le rotazioni di  $90^\circ$  intorno ai centri dei quadretti e le rotazioni di  $180^\circ$  intorno ai punti medi dei lati dei quadretti (ATTENZIONE: verificate che ciascuna di queste trasformazioni non cambia l'aspetto della griglia!). Una **MOSSA LEGITTIMA DI TIPO II** è allora una qualunque combinazione delle traslazioni, che abbiamo chiamato mosse di tipo I, e di queste rotazioni. Nella prossima griglia trovate altre forme e vi poniamo le stesse domande che prima vi abbiamo posto rispetto alle mosse legittime di tipo II.



- ogni figura è ripetuta due volte: c'è una mossa legittima di tipo II che manda l'una nell'altra le due figure?

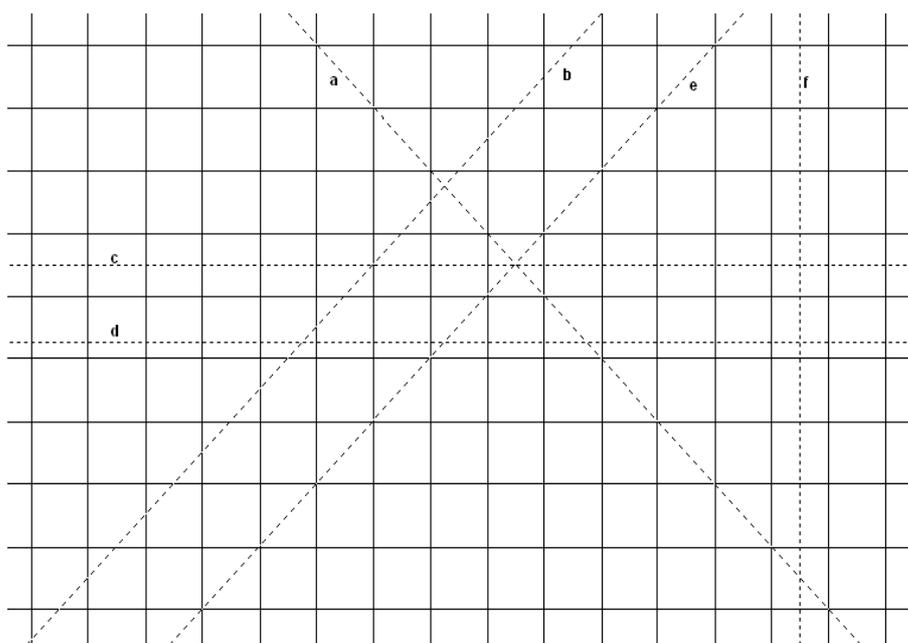
	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<b>SÌ</b>					
<b>NO</b>					



- quasi tutte le figure sono di tipo A (rispetto alle mosse legittime di tipo II), ovvero la famiglia delle figure ottenute applicando a una di queste tutte le mosse legittime di tipo II ricopre il piano senza sovrapposizioni e senza buchi. Una sola fra le cinque figure non è di questo tipo: quale?

.....

In realtà non ci sono solo traslazioni e rotazioni che fissano la griglia, ma anche altre trasformazioni. Per esempio, le rette della quadrettatura sono *assi di simmetria* della griglia: ciò vuol dire che la riflessione rispetto a una di queste rette manda la griglia in se stessa; ovvero (ed è un altro modo di dire la stessa cosa) se appoggiamo uno specchio a una di queste rette, perpendicolarmente al piano che contiene il disegno, vediamo nello specchio un'immagine virtuale che riproduce esattamente la metà del disegno nascosta dallo specchio stesso.



Le rette della quadrettatura non sono i soli assi di simmetria della griglia: quali altre rette lo sono? Ad esempio, le rette tratteggiate in figura sono assi di simmetria della griglia?

	a	b	c	d	e	f
SÌ						
NO						

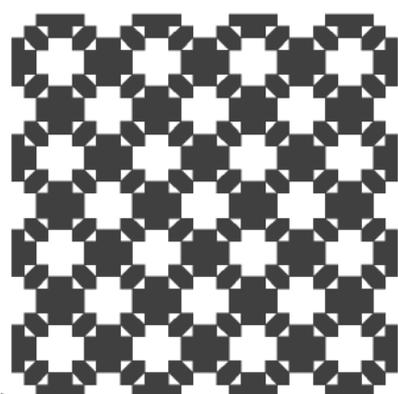


## UGUALI o DIVERSI

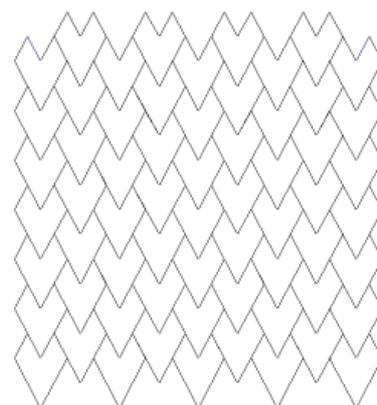
Avvio all'astrazione

Quelli che in matematica si chiamano “mosaici” sono delle figure piane che (come la griglia quadrettata che abbiamo esaminato) non cambiano rispetto a due traslazioni, in due direzioni diverse. Si tratta quindi sempre di figure che dobbiamo immaginare illimitate (cioè che “continuano” al di là del foglio o dello schermo su cui sono disegnate). Per distinguere fra queste figure si può studiare quali altre trasformazioni ci sono (oltre alle traslazioni) che non mutano il loro aspetto, come abbiamo fatto per la carta a quadretti.

Chiameremo “uguali” due mosaici per i quali è identico lo schema di tutte le trasformazioni che li fissano e “diversi” due mosaici per cui questi due schemi sono diversi. Ad esempio, dei due mosaici A e B qui sotto, solo A è “uguale” alla carta a quadretti da questo punto di vista.

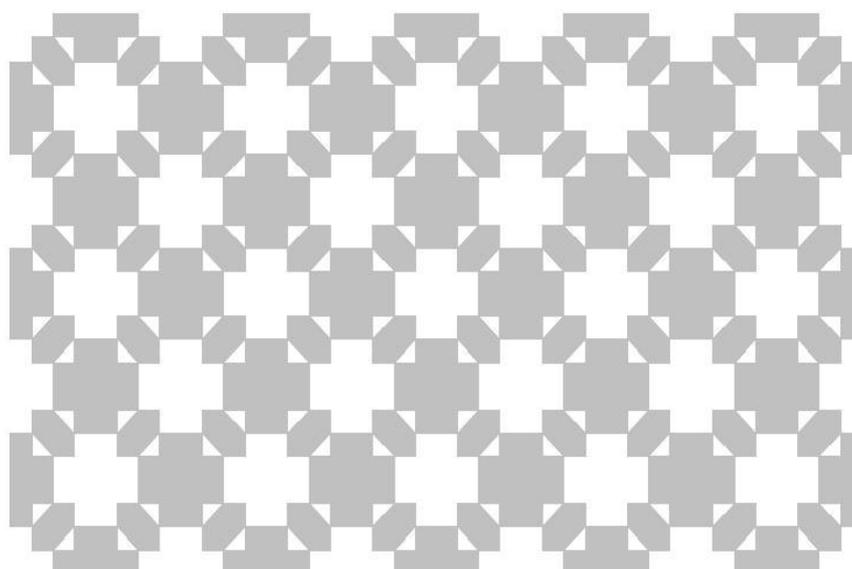


A



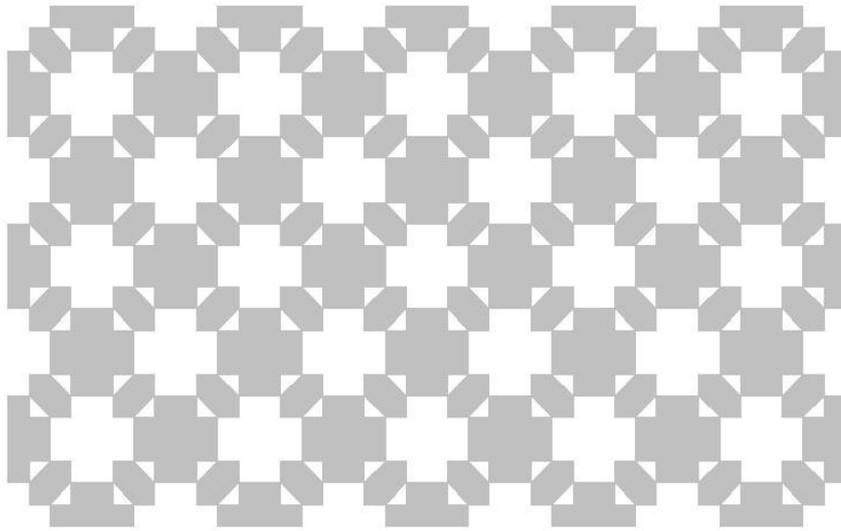
B

Nella carta a quadretti abbiamo trovato rotazioni di  $90^\circ$ : dove sono ubicati i centri di rotazione di  $90^\circ$  sul mosaico A? (potete segnarli sulla figura qui sotto)

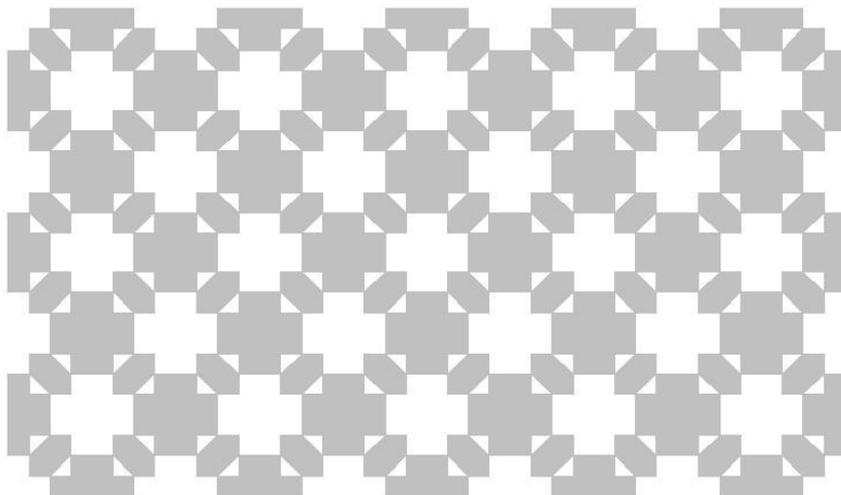




Nella carta a quadretti abbiamo trovato dei punti che erano centri di rotazione per una rotazione di  $180^\circ$ , ma non per una di  $90^\circ$ : dove sono ubicati i centri corrispondenti sul mosaico A?



Nella carta a quadretti abbiamo trovato degli assi di simmetria, e ne abbiamo trovati in 4 direzioni diverse: come sono situati gli assi di simmetria rispetto al mosaico A?



E, per quello che riguarda il mosaico B, che abbiamo asserito essere “diverso” dalla carta a quadretti, sapreste dire perché siamo sicuri che è davvero differente?

.....

.....

.....

**UGUALI o DIVERSI**  
*Avvio all'astrazione*

Volendo continuare questa operazione di “mettere in ordine” i mosaici, dal punto di vista della simmetria, i casi che si incontrano sono esattamente 17, e, nella prossima attività, esaminiamo 4 di questi 17 casi.

I quattro casi corrispondono a questi quattro simboli, che noi qua useremo semplicemente come un'etichetta:

$22\times$                   442                  \*442                  4\*2

Avete a disposizione venti disegni (che, se ne immaginate la continuazione, costituiscono dei mosaici) estratti da cinque fotografie, usando l'animazione “Generatore di mosaici” del DVD “*Simetria*”.\*

Scegliete una quaterna che si riferisca alla stessa foto, e, per ciascuno dei quattro disegni, rispondete alle seguenti domande:

**A.** C'è una rotazione di  $90^\circ$  che non muta l'aspetto del disegno?

	<b>SÌ</b>	<b>NO</b>

**B.** Ci sono assi di simmetria, ovvero delle rette tali che la riflessione rispetto a questa retta non muta l'aspetto del disegno? (usate eventualmente uno specchio per verificarlo)

	<b>SÌ</b>	<b>NO</b>

**C.** Nei disegni per i quali la risposta alla domanda B è sì, in quante diverse direzioni trovate un asse di simmetria?

\* Non si tratta di un errore di stampa! Questo DVD è stato realizzato da un'associazione portoghese e in portoghese si dice “*Simetria*”, con una sola “m”...



	1	2	3	4	più di 4

**D.** Se le risposte alle domande A e B sono due sì, cosa potete dire della posizione dei centri di rotazione rispetto agli assi di simmetria? È vero che tutti i centri di rotazione sono ubicati su un asse di simmetria?

	SÌ	NO

Avete anche a disposizione una camera quadrata di specchi e dei disegni che rappresentano un modulo quadrato estratto dai mosaici che state studiando (i moduli sono sei, perché in alcuni casi avete due possibilità per lo stesso disegno).

**E.** È possibile ricostruire il disegno nella camera quadrata di specchi? Ovvero: ciò che si vede nella camera disponendo il modulo all'interno è esattamente il mosaico da cui siete partiti?

	SÌ	NO

Registrate in questa tabella le vostre risposte a tutte le domande per ciascuno dei quattro disegni:

	Rotazioni 90°	Specchi	Direzioni specchi	Centri e assi	Ricostruzione camera

Confrontate questa tabella con quella che vi diamo qui sotto e che vi dice come si comportano rispetto a queste domande i quattro tipi di simmetria che stiamo analizzando:

**UGUALI o DIVERSI**  
*Avvio all'astrazione*

	Rotazioni 90°	Specchi	Direzioni specchi	Centri e assi	Ricostruzione camera
<b>442</b>	<b>SÌ</b>	<b>NO</b>	<i>///</i>	<i>///</i>	<b>NO</b>
<b>*442</b>	<b>SÌ</b>	<b>SÌ</b>	<b>4</b>	<b>SÌ</b>	<b>SÌ</b>
<b>4*2</b>	<b>SÌ</b>	<b>SÌ</b>	<b>2</b>	<b>NO</b>	<b>SÌ</b>
<b>22 ×</b>	<b>NO</b>	<b>NO</b>	<i>///</i>	<i>///</i>	<b>NO</b>

Dal confronto fra queste due tabelle potete classificare i quattro disegni:

Il disegno \_\_\_\_\_ è un \_\_\_\_\_  
 Il disegno \_\_\_\_\_ è un \_\_\_\_\_  
 Il disegno \_\_\_\_\_ è un \_\_\_\_\_  
 Il disegno \_\_\_\_\_ è un \_\_\_\_\_

C'è qualche domanda che era inutile, al fine di distinguere i 4 disegni? Se sì, quale/i e perché?

.....

.....

.....

.....

.....

Potete confrontare la vostra quaterna con le altre quaterne analizzate dai vostri compagni.

Potete anche ritrovare questi quattro casi nelle diverse animazioni del DVD “*Simmetria*”:

- nell’animazione “*Dal timbro al disegno*”, passando il mouse sopra al timbro potete vedere i nomi dei 4 casi che avete esaminato; cliccando, si può far partire un’animazione che mostra come un “timbro” (che riassume tutte le informazioni sul corrispondente tipo di simmetria) “stampa” il disegno sul piano;
- nell’animazione “*Dal disegno al timbro*”, dopo aver scelto un motivo, siete voi che dovete individuare questi 4 casi fra i 17 mosaici che vi vengono proposti (trovate nel DVD oltre ai 17 casi dei mosaici anche i 7 casi dei fregi, quindi 24 figure in questa pagina): se li avete individuati, potete poi per ciascuno di essi esaminare nel dettaglio la struttura di tutte le trasformazioni che lo fissano;
- nell’animazione “*Generatore di mosaici*” vedete come sono nati, a partire da una foto, i disegni che avete studiato: trovate quali sono (in alto) i 4 simboli corrispondenti ai 4 casi che avete esaminato?