



SCHEDA N

DAI NASTRI ALLE SUPERFICI
CON GLI OCCHIALI DELLA TOPOLOGIA

1. Nastri da mettere in ordine

Le immagini nei fogli che avete a disposizione raffigurano delle superfici che chiamiamo nastri. Per alcuni di essi, quelli indicati con le lettere dalla A alla G, avete a disposizione anche dei modelli in fettuccia, dello stesso colore dell'immagine corrispondente, che potete osservare e manipolare.

Affronteremo nel seguito diverse attività che punteranno a “mettere in ordine” questi nastri, ovvero a cercare dei criteri con cui distinguerli. Prima di iniziare, prendetevi un po' di tempo per osservare i modelli in fettuccia e le immagini e per familiarizzarvi con queste forme.

Per esempio, considerate (uno per volta) i sette modelli in fettuccia e provate a disporre ciascuno di questi in modo che rappresenti una delle immagini raffigurata nel primo dei due fogli (A-G). Riuscite anche a realizzare, con lo stesso modello in fettuccia, uno dei nastri H-N? Quale o quali di questi, e con quale fettuccia?

.....
.....
.....

Vi sembra che si possa dire che i nastri A e F sono “uguali”? SÌ NO
Spiegate il perché:

.....
.....

E i nastri A e L? SÌ NO
Spiegate il perché:

.....
.....

UGUALI o DIVERSI
Avvio all'astrazione

E i nastri F e N? SÌ NO

Spiegate il perché:

.....

.....

2. Nastri con le ZIP

Prendete i due rettangoli di stoffa con le *zip* che avete a disposizione. Per ottenere il nastro A occorre utilizzare il rettangolo (di colore blu) con le *zip* orientate in verso opposto, chiudendo la *zip* dopo aver dato al rettangolo una torsione di 180° (che chiamiamo MEZZA TORSIONE). Invece, per ottenere N, occorre usare il rettangolo di stoffa (di colore verde) con le *zip* orientate nello stesso verso, chiudendo la *zip* dopo aver dato al rettangolo due mezza torsioni.

Per ciascuno degli altri nastri, trovate quale rettangolo di stoffa con *zip* occorre utilizzare per realizzarne un modello. Registrate nella tabella qui sotto le vostre osservazioni (riempiendo per lo meno le prime sette righe). Potete indicare i rettangoli di stoffa con il loro colore.

	 Rettangolo di stoffa utilizzato	 Descrizione di come si è ottenuto il nastro
A		
B		
C		
D		
E		
F		
G		
H		
I		



J		
K		
L		
M		
N		

Emerge da questa osservazione un criterio di classificazione naturale, quello per cui due nastri sono dello stesso tipo se si possono costruire con lo stesso rettangolo di stoffa. Come vengono divisi i nastri secondo questo criterio?

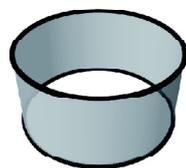
.....

.....

.....

3. Il BORDO dei nastri

Provate ad esaminare il BORDO dei nastri: il bordo di un "normale" cilindro come quello qui in figura è costituito da due curve distinte fra loro.



Com'è fatto il bordo del nastro A?

.....

.....

Potete eventualmente utilizzare uno dei rettangoli di carta che avete a disposizione, costruire un modello del nastro A e seguirne il bordo, tenendo traccia del percorso fatto con un pennarello.

Come sarà il bordo degli altri nastri? Come avete fatto con il nastro A, potete aiutarvi

UGUALI o DIVERSI
Avvio all'astrazione

nell'indagine ricorrendo a rettangoli di carta e costruendo dei modelli come quelli in fettuccia. Quindi, per ciascuno di essi, decidete se il bordo è costituito da un'unica curva oppure da più di una.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
Numero di curve che costituiscono il bordo														

Usiamo ora come criterio di classificazione il numero di curve che costituiscono il bordo di un nastro: consideriamo due nastri nella stessa classe se il loro bordo è costituito dallo stesso numero di curve e in classi diverse se il loro bordo è costituito da un numero diverso di curve.

Come vengono divisi i nastri secondo questo criterio?

.....

.....

.....

Si tratta della stessa suddivisione a cui eravate arrivati nell'attività precedente?

SÌ NO

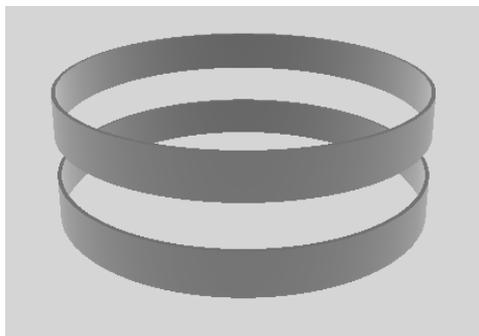
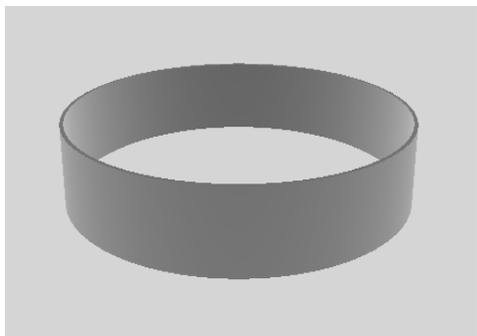
4. Diamoci un TAGLIO!

Avete osservato che i nastri si possono suddividere in due classi:

- quelli come A (che prendono il nome di NASTRO DI MOEBIUS) che hanno una sola curva di bordo e che si realizzano con i rettangoli di stoffa che hanno le *zip* orientate in verso opposto;
- quelli come E (che prendono il nome di CILINDRO) con il bordo costituito da due curve e che sono ottenuti con i rettangoli di stoffa che hanno le *zip* orientate nello stesso verso.

Per proseguire nell'osservazione, costruite, se non l'avete già fatto, dei modelli in carta dei nastri da A a G (e, se volete, anche da H a N).

UGUALI o DIVERSI
Avvio all'astrazione



Se si taglia a metà un cilindro “normale”, come quello in figura, lungo la “circonferenza centrale” si ottengono due cilindri identici, slacciati fra loro, di altezza metà. Che cosa si ottiene se si taglia a metà il nastro di Moebius A lungo la “circonferenza centrale”? Scrivete qui sotto un'ipotesi:

.....
.....

Verificate la vostra ipotesi sul modello di carta che avete costruito. Che cosa avete ottenuto?

.....
.....

Che cosa prevedete che possa accadere tagliando lungo la “circonferenza centrale” gli altri nastri? Provate a formulare delle congetture, perlomeno per i primi 7 nastri

A:.....
.....

B:.....
.....

C:.....
.....

D:.....
.....

UGUALI o DIVERSI
Avvio all'astrazione

E:

.....

F:

.....

G:

.....

H:

.....

I:

.....

J:

.....

K:

.....

L:

.....

M:

.....

N:

.....

Verificate ora con i modelli di carta le vostre congetture, registrando nella tabella, per ciascun nastro, il numero di oggetti che si ottengono dopo il taglio. Eventualmente, potete aggiungere una descrizione di come questi oggetti sono fatti.

UGUALI o DIVERSI
Avvio all'astrazione



	Numero di oggetti	Descrizioni
A		
B		
C		
D		
E		
F		
G		
H		
I		
J		
K		
L		
M		
N		

UGUALI o DIVERSI
Avvio all'astrazione

Se ci limitiamo a contare il numero di oggetti ottenuti con il taglio, e usiamo questo numero come criterio di classificazione, come vengono suddivisi i nastri?

.....
.....
.....

Si tratta della stessa suddivisione a cui eravate arrivati nelle attività precedenti (2 e 3)?

SÌ NO

Se, oltre che contare quanti oggetti si ottengono con il taglio, andiamo anche a studiare come sono fatti questi oggetti, le cose si complicano.

Provate a confrontare due situazioni in cui, tagliando, si ottenga lo stesso numero di oggetti, e che però per qualche motivo non vi sembrano del tutto “uguali”, e cercate di esplicitare qualcosa che le distingue.

Riuscite a vedere qualcosa che distingue, ad esempio, il nastro E dal nastro B?

.....
.....

E il nastro A dal nastro C?

.....
.....

La classificazione che raggruppa i nastri in due categorie (cilindri oppure nastri di Moebius) è una classificazione che “vede” quanti diversi oggetti si ottengono tagliando il nastro a metà, ma non “vede” altre differenze più fini, legate alla maniera con cui gli oggetti sono disposti nell’ambiente (per esempio se l’oggetto è annodato o meno, oppure se due oggetti sono allacciati o slacciati fra loro).

Proviamo ora a usare un’altra classificazione, dicendo che due cilindri, oppure due nastri di Moebius, sono dello stesso tipo se, avendo costruito per entrambi un modello di carta, possiamo manipolarli (SENZA tagliare o incollare) fino a portarli nella stessa posizione.

Secondo quest’altra classificazione, ci sono due cilindri oppure due nastri di Moebius “uguali” fra loro nel primo gruppo di sette nastri A, ..., G?

SÌ NO



Se sì, quali?

.....
.....

E se consideriamo tutti i 14 nastri A, ..., N? SÌ NO

Se sì, quali?

.....
.....

Come potremmo descrivere un nastro (cilindro o nastro di Moebius) con un numero (intero) in modo tale che due nastri siano associati allo stesso numero se (e soltanto se) sono “uguali” secondo quest’ultima classificazione?

.....
.....

E come leggiamo su questo numero la prima classificazione che abbiamo incontrato, ovvero la distinzione tra cilindri e nastri di Moebius?

.....
.....

5. Altre superfici

Parlando di nastri, avete incontrato due classificazioni, una che li divideva in due gruppi (i cilindri e i nastri di Moebius) e l'altra, più fine, che non si preoccupava soltanto del fatto che l'oggetto in questione fosse un cilindro o un nastro di Moebius, ma andava a vedere la maniera con cui questo nastro era attorcigliato nell'ambiente. La seconda classificazione si basava su un numero intero, mentre per la prima contava soltanto il fatto che questo numero fosse pari o dispari.

In questa attività incontrerete delle superfici, come sfere e ciambelle, e vi chiediamo di studiarle dal punto di vista della prima¹ fra le due classificazioni che avete incon-

¹ Consideriamo il primo tipo di classificazione perché altrimenti il problema di classificare le superfici sarebbe estremamente difficile: non solo al di là dei mezzi che voi avete a disposizione in questo momento, ma talmente difficile che i matematici tuttora non hanno una risposta completa a questo problema!

UGUALI o DIVERSI

Avvio all'astrazione

trato con i nastri.

Questo significa che potete (immaginare di) tagliare un oggetto e manipolarlo, o snodarlo o semplificarlo PURCHÉ alla fine ri-incolliate il taglio esattamente come era prima. Un po' come con le *zip*: potete aprire una *zip* e, se corrisponde a un nastro attorcigliato, lo potete manipolare aggiungendo o togliendo torsioni, ma poi dovete richiudere la *zip*, e quindi ricucire i due pezzi esattamente come erano nella posizione di partenza.

Proprio pensando alle *zip*, è chiaro perché diciamo che le figure qui sotto rappresentano un cilindro (a sinistra) e un nastro di Moebius (a destra):



i lati che non sono etichettati con una lettera sono quelli che andranno a costituire il bordo del cilindro e del nastro di Moebius rispettivamente; i lati etichettati con una lettera sono quelli dove dovete immaginare la *zip*, e la freccia indica il verso della *zip* stessa.

Per la prossima attività avete a disposizione un foglio formato A4 con otto immagini e due gruppi di schede.

Il foglio formato A4 raffigura delle superfici molto “ordinate”. Queste vengono chiamate superfici in forma standard, e potete usarle come riferimento per ciò che vi chiederemo di fare con le altre immagini. Per ciascuna di esse è segnato un numero (che si chiama *genere* della superficie), attraverso il quale potete identificare di quale superficie stiamo parlando (ad esempio, la sfera corrisponde al genere 0 e la ciambella al genere 1).

Tutte le superfici di questo foglio sono senza bordo, quindi non trovate qui né cilindri, né dischi, né nastri di Moebius².

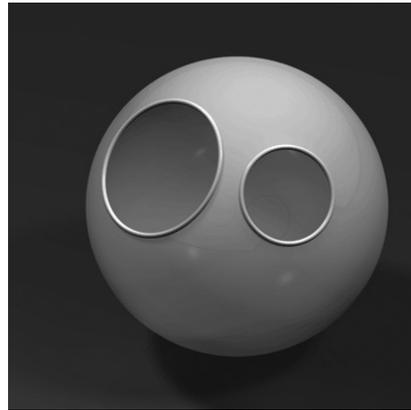
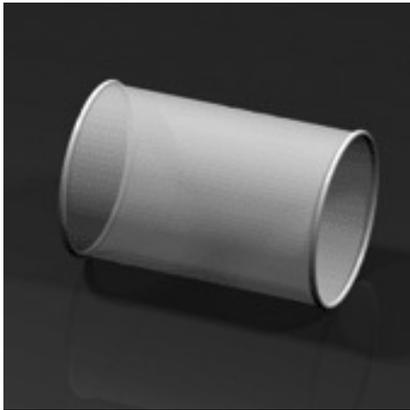
Un primo gruppo di schede (contrassegnato con lettere dalla A alla N) presenta delle superfici disegnate in maniera schematica come abbiamo appena fatto per cilindro e nastro di Moebius: ogni volta che trovate due lati con la stessa lettera dovete immaginare una *zip* che permetta di attaccare questi due lati, e la freccia indica come è disposta la *zip*. Provate a immaginare che superfici si ottengono e registrate le vostre ipotesi nella tabella tenendo come riferimento le superfici standard.

Tenete presente però che, fra le figure di queste schede, non troviamo soltanto delle superfici standard, ma anche nastri di Moebius, e superfici con bordo. Per facilitarvi il compito vi diciamo che le schede comprendono: tre sfere; tre ciambelle; due

² Cilindri e dischi si possono in realtà ricavare da una superficie standard, perché se fate un foro su una sfera e poi la spianate (immaginatela di gomma!), ottenete un disco, ovvero un cerchio; e, allo stesso modo, un cilindro è come una sfera con due fori. Invece i nastri di Moebius appartengono a un altro gruppo di superfici, e sono l'unico caso che qui prendiamo in considerazione fra le superfici di quest'altro gruppo.



ciambelle con un foro; tre dischi³; un cilindro⁴; un nastro di Moebius; due doppie ciambelle.



Potete aiutarvi con dei modellini in carta e con forbici e scotch. Attenzione però, perché non tutte le identificazioni indicate dalle lettere potranno essere concretamente realizzate sui modellini di carta; dovrete quindi supplire a queste carenze con la vostra immaginazione, ricordando che nel mondo della topologia le distanze non hanno importanza e che al posto della carta occorrerebbe un materiale che si possa estendere quanto e come volete (senza lacerazioni).

	Descrizione
A	
B	
C	
D	
E	
F	
G	
H	

³ Cioè sfere con un foro.

⁴ Cioè una sfera con due fori.

UGUALI o DIVERSI
Avvio all'astrazione

I	
J	
K	
L	
M	
N	
O	

Un secondo gruppo di schede comprende 20 immagini, contrassegnate da un numero 1-...- 20, di cui alcune sono fotografie di oggetti comuni e altre sono immagini virtuali. Ciascuna immagine corrisponde a una superficie in forma standard, e vi chiediamo di identificare quale. Ma in che senso potete pensare che una foto rappresenti un oggetto che “corrisponde a” una superficie standard? Per esempio, immaginate che l’oggetto in questione sia una patata, consideratene solo la “buccia”, immaginatela fatta di gomma (come un palloncino), e pensate di soffiarci dentro: allora otterreste una sfera, e proprio in questo senso diciamo che la patata “corrisponde a” una sfera.

Con queste “regole”, 7 fra le immagini di questo gruppo di schede rappresentano una sfera, altre 6 rappresentano una ciambella, mentre altre 7 non corrispondono né a una sfera né a una ciambella.

Sapreste dire, per ciascuna immagine, se si tratta di una sfera, di una ciambella, o di qualcos’altro? E, per ciascuna delle immagini che non rappresentano né sfere né ciambelle, sapreste indicare a quale delle superfici standard corrisponde (potete registrarlo in tabella indicandone il genere)?

UGUALI o DIVERSI
Avvio all'astrazione



Immagine	Descrizione	Superficie standard (genere)
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		