matematita
Centro interuniversitario
di ricerca per la comunicazione
e l'apprendimento informale
della matematica

FASCICOLO INTRODUTTIVO al *kit* di laboratorio

DIAMO FORMA ALLA GEOMETRIA: REGOLARI O NO?

per la scuola secondaria di I grado

di Alessandra Brena e Ombretta Locatelli

Collana Quaderni di Laboratorio
Titolo Diamo forma alla geometria: Regolari o no?
- per la scuola secondaria di I grado
di Alessandra Brena e Ombretta Locatelli
Progetto grafico di Marianna Lorini
V versione – agosto 2013

Questo fascicolo è stato pensato per essere usato con il *kit* di laboratorio cui si riferisce

SOMMARIO

INTRODUZIONE

I laboratori a cui questo fascicolo si riferisce propongono diverse attività riguardanti poliedri e tassellazioni piane, calibrate per classi della scuola secondaria di primo grado.
Il materiale a disposizione permette di costruire con facilità una grande varietà di forme, piane e solide; ciò stimola la curiosità dei ragazzi e rende naturale il passaggio da una lettura della realtà che sia puramente intuitiva e legata all'osservazione e alla manipolazione a un'analisi più astratta di alcune questioni e a una prima formalizzazione di taluni fra i concetti affrontati.

PERCHÉ I POLIEDRI

Nella scuola pre–universitaria, l'argomento "poliedri" soffre da anni di una cronica mancanza di attenzione che ne ha ridotto lo studio alla memorizzazione di qualche formula per il calcolo di aree e volumi. E ciò è un peccato, tanto più che l'argomento si presta molto bene a sviluppare la capacità degli studenti di osservare la realtà, costruendo quel bagaglio di esperienze che sono un primo passo fondamentale verso la comprensione profonda dei fatti matematici (e non solo!). In generale, vedere l'oggetto che si sta studiando, ricostruirlo e manipolarlo sono possibilità preziose al fine di interiorizzare i concetti coinvolti: in questo laboratorio, in particolare, le definizioni non restano sulla carta, ma corrispondono a caratteristiche che i ragazzi scoprono via via e autonomamente.

I CONTENUTI

Dedicare tempo all'osservazione degli oggetti concreti, modelli dei poliedri astratti, innanzitutto permette ai docenti di far emergere negli studenti le domande che aprono la strada ai problemi che verranno posti, e secondariamente consente ai ragazzi di rendersi conto della enorme varietà di "forme" possibili nell'ambito dei poliedri (toccandola con mano, in senso proprio!). Troppo spesso i ragazzi pensano che i soli poliedri siano prismi e piramidi; se invece li si lascia liberi di costruire, e si mette loro a disposizione del materiale che consenta di farlo con facilità, producono in modo molto naturale le forme più svariate (dai poliedri regolari agli antiprismi, dai poliedri stellati ad altri oggetti bislacchi che non rientrano nelle categorie usuali) e quindi anche per loro diventa un problema intrigante quello di classificare questi

oggetti, di “metterli in ordine”, di capire le loro caratteristiche.
Occuparsi della descrizione degli oggetti proposti dal laboratorio significa occuparsi di un problema particolarmente delicato, che va a toccare direttamente la questione del linguaggio e del quanto e come dobbiamo richiedere ai ragazzi che esso sia rigoroso. Spesso gli studenti non comprendono l’esigenza del rigore, che avvertono solo come un gran peso, finendo per “recitare” delle definizioni stereotipate, senza rendersi conto esattamente del significato di alcuni aggettivi o di alcune precisazioni.
Diversa è la situazione se viene mostrato loro, su un esempio e nel contesto di un gioco (come si fa nell’ultima attività della scheda A di questo laboratorio), quanto sia necessario un linguaggio preciso se si vuole capire ciò che i compagni vanno dicendo e se ci si propone di farsi capire, e quale può essere l’effetto dell’alterazione o dell’omissione di una singola parola nell’individuare, per esempio, un poliedro.

Studiare la natura combinatoria dei poliedri è un’operazione sicuramente più interessante che non studiare l’analoga situazione nell’ambito dei poligoni (ogni poligono ha tanti vertici quanti lati; e, fissato un qualunque numero *n*, purché maggiore o uguale a 3, si può sempre costruire un poligono con quel numero di lati e vertici). Nel caso dei poliedri i numeri coinvolti sono tre (il numero V dei vertici, il numero S degli spigoli e il numero F delle facce) e non sono indipendenti tra loro, ma sono legati dalla relazione di Eulero (V-S+F=2 per i poliedri semplicemente connessi, ovvero quelli che, se fossero disegnati su un materiale deformabile, potrebbero essere “gonfiati” in una sfera). E si possono formulare parecchi problemi interessanti riguardo a questi numeri.
Il laboratorio non entra in profondità in tali questioni: agli studenti viene chiesto di contare, in alcuni casi particolari, i numeri di vertici, spigoli e facce di un poliedro. Viene lasciato all’insegnante, se lo ritiene opportuno, il compito di approfondire l’argomento introducendo la relazione di Eulero o altre osservazioni correlate.
Tuttavia, anche il semplice conto di vertici, spigoli e facce, a cui qui ci limitiamo, non è un problema banale (specie su poliedri un po’ “complicati”); ed è una buona introduzione al tema della simmetria, perché i ragazzi sono in qualche modo forzati a “organizzare il conto” se non vogliono perdere il filo; e per organizzare il conto, devono prendere in considerazione (più o meno consapevolmente) proprio la simmetria dell’oggetto.

Analizzare la regolarità dei poliedri è l’operazione su cui più ci si dilunga in questo laboratorio. La regolarità è una questione che emerge in modo molto naturale di fronte a una grande varietà di forme: è naturale cercare di decidere quali siano “più belle delle altre” e quali siano esattamente le caratteristiche in base alle quali vengono giudicate “più belle delle altre”. Qui si chiede così ai ragazzi di decidere “in autonomia” quali poliedri vogliono chiamare regolari e quali no e, solo in un secondo tempo, si chiede loro di scrivere una “definizione” di poliedro regolare, obbligandoli così a curare la coerenza interna fra la definizione che scrivono e la scelta che hanno operato in precedenza.
Arrivati quindi alla definizione di poliedro regolare, si fa notare agli studenti la gran-

de differenza che esiste rispetto alla situazione dei poligoni (i poligoni regolari sono infiniti, mentre c'è solo un numero finito di poliedri regolari) e li si porta a riconoscere che i poliedri regolari sono solo cinque, facendo provare loro a costruirli con il materiale che hanno a disposizione.
Un analogo percorso porta i ragazzi anche alla costruzione delle tre tassellazioni regolari (e alla consapevolezza che esse sono i soli tre casi possibili).
Sia nel caso dei poliedri che nel caso delle tassellazioni, si prova poi ad abbassare i vincoli di regolarità che portano a individuare i cinque poliedri platonici, fino ad esaminare poliedri e tassellazioni uniformi (in cui le facce sono poligoni regolari, ma non necessariamente uguali fra loro e in cui intorno a ciascun vertice arriva la stessa sequenza di poligoni regolari, nello stesso ordine).

Più in particolare, i contenuti delle 4 schede di lavoro illustrate in questo laboratorio sono i seguenti:

- la scheda A prevede una prima fase di manipolazione e osservazione che rappresenta un'occasione per introdurre/ricordare ai ragazzi che cosa sono i poliedri. Nella seconda fase, che è una sorta di jolly e che può essere svolta in un qualsiasi momento del percorso, un gruppo di ragazzi deve descrivere ai compagni un poliedro a scelta, e questi, senza poterlo vedere, devono essere in grado di ricostruirlo;
- la scheda B conduce i ragazzi (in maniera, per così dire, "costruttiva") alla consapevolezza che i poliedri regolari sono soltanto cinque, dopo aver fatto svolgere loro un'attività di osservazione delle caratteristiche combinatorie (numero di facce, vertici e spigoli) e averli condotti a formulare la definizione di poliedro regolare;
- la scheda C riguarda i poliedri uniformi e fa riflettere i ragazzi su alcuni esempi di poliedri di questo tipo;
- la scheda D propone diverse attività riguardanti le tassellazioni del piano. I ragazzi sono portati a realizzare diverse tassellazioni e quindi a esaminare condizioni analoghe a quelle già studiate per i poliedri per poter individuare tutte le tassellazioni regolari e alcuni esempi di tassellazioni uniformi.

I METODI

La modalità con cui proponiamo che le attività vengano svolte è quella "laboratoriale". Essa è strutturata nel seguente modo:

- suddivisione in piccoli gruppi di lavoro (il materiale presente nel *kit* è sufficiente per 5 gruppi di lavoro);
- utilizzo del materiale manipolabile preparato per il laboratorio;
- svolgimento delle attività proposte nelle varie schede di lavoro;
- scrittura delle risposte negli appositi spazi sulla scheda di lavoro.

Questa modalità è finalizzata al raggiungimento di alcuni obiettivi, tipici del fare ricerca in matematica, che possiamo così riassumere:

- costruzione del proprio sapere;
- comunicazione delle proprie scoperte;
- interiorizzazione delle nozioni apprese.

Dalla collaborazione tra i componenti del gruppo, dai liberi tentativi di risposta e con la guida delle schede di lavoro, i ragazzi giungono autonomamente ad acquisire alcune conoscenze base sulla geometria dei poliedri.

È importante che gli studenti scrivano le risposte a cui sono giunti, anche se sbagliate. È molto meglio partire da qualcosa di sbagliato, ma che è scaturito dai ragionamenti dei ragazzi, piuttosto che mettere loro in testa le nostre risposte (se le dimenticherebbero a breve!). Inoltre è proprio nel momento in cui si rielaborano le conoscenze per comunicarle per iscritto che queste vengono interiorizzate e comprese a fondo. Infine, il fatto di riportare le risposte sulla scheda consente di tenere traccia del lavoro svolto, che può eventualmente essere ripreso successivamente in classe.

Altrettanto importante è che i ragazzi acquisiscano o affinino la capacità di descrivere la realtà e, in un certo senso, di "raccontare la matematica", come ad esempio è richiesto nella già descritta attività finale della scheda A. Riteniamo che questa abilità sia un passaggio fondamentale dell'apprendimento, successivo alla fase di osservazione, e che NON ne sia automatica conseguenza. In generale, l'aver capito i concetti, le proprietà, le regole del gioco non si traduce automaticamente nella facilità a descrivere tutto ciò ai compagni: per raggiungere questo obiettivo occorre insistere con attività che siano a ciò esplicitamente finalizzate.

Durante lo svolgimento del laboratorio l'insegnante ha il compito di sorvegliare le attività dei vari gruppi, garantendo una generale situazione di equilibrio. Può certamente sciogliere dubbi o fornire chiarimenti "sulle regole del gioco", sottolineare gli aspetti critici che scaturiscono dai ragionamenti e magari porre ulteriori domande suggerite proprio dai dibattiti in corso all'interno del gruppo, ma non deve dare risposte, facendo sempre in modo che gli studenti giungano autonomamente alle soluzioni.

La scheda di lavoro svolge la funzione di filo conduttore del laboratorio, ma non è necessario che venga seguita pedissequamente. Anzi, in certe occasioni, può essere particolarmente utile e stimolante discostarsi dal tracciato delle schede, magari per seguire degli spunti scaturiti spontaneamente dal lavoro dei ragazzi. È importante lasciare ai gruppi il tempo di svolgere le attività richieste, ma non importa se non tutti i gruppi riescono a terminare l'attività nel tempo stabilito; importa invece che essi affrontino i quesiti scontrandosi con le difficoltà proprie del laboratorio e cercando di ragionare sui metodi da adottare per superarle. Lo scopo del laboratorio non è infatti quello di arrivare al completamento dell'intera scheda, ma – come abbiamo sottolineato – quello di aiutare i ragazzi a costruire il proprio sapere autonomamente. La guida attenta e competente dell'insegnante, che resta naturalmente un elemento cruciale per stimolare opportunamente i ragazzi, non deve però togliere loro la sensazione della scoperta.

I POSSIBILI PERCORSI E I TEMPI

Ciascuna delle schede di lavoro raccolta in questo quaderno è pensata per attività dalla durata, in linea di massima, intorno all'ora e mezza.
Riteniamo sia ragionevole pensare che le prime schede possano richiedere un tempo di svolgimento maggiore delle ultime, in quanto i ragazzi devono ancora prendere confidenza con il materiale e con la modalità di lavoro, che per loro potrebbe essere nuova.
L'insegnante, se decide di proporre questo laboratorio agli studenti, non è necessario che affronti prima in classe i temi che vi vengono trattati; infatti il laboratorio contiene una prima attività, quella della scheda A, che è una sorta di introduzione alla nozione di poliedro.
Suggeriamo di utilizzare le schede nell'ordine in cui sono presentate (A, B e C), soprattutto se gli studenti non hanno ancora affrontato in classe il tema della geometria solida: esse infatti costituiscono un percorso di difficoltà crescente. La scheda C però non pregiudica la successiva, quindi se si ha poco tempo a disposizione, suggeriamo di privilegiare le schede A e B, integrandole poi eventualmente con una delle due restanti.
L'attività della scheda D sulle tassellazioni potrebbe anche essere svolta a sé stante; tuttavia essa si arricchisce di significato dopo aver affrontato anche le tematiche dei poliedri, perché così diventano evidenti le analogie tra tassellazioni (regolari e non) nel piano e poliedri (regolari e non) nello spazio.
Le schede di laboratorio sono le stesse per ciascuna classe (dalla prima alla terza). Naturalmente ad una medesima richiesta faranno riscontro risposte diverse e si accetteranno livelli di approfondimento diversi, a seconda dell'età dei ragazzi (si vedano i commenti alle singole attività delle schede).

IL MATERIALE A DISPOSIZIONE

Il *kit* di laboratorio comprende:

1. questo fascicolo di presentazione del laboratorio;
2. tessere di polydron di varie forme:
   - 206 triangoli equilateri piccoli;
   - 15 triangoli equilateri grandi;
   - 15 triangoli rettangoli isosceli (1, 1, $\sqrt{2}$);
   - 50 triangoli isosceli non rettangoli (1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$);
   - 120 quadrati;
   - 60 pentagoni;
   - 75 esagoni;
   - 25 ottagoni;
   - 24 decagoni;
3. 5 poster (formato A4) plastificati con le immagini di 8 poliedri indicati con A, B, C, D, E, F, G, e H;
4. 8 sviluppi di poliedri su cartocino;
5. 5 divisori per il gioco "mosca cieca";
6. 10 schedine plastificate con immagini di poliedri;
7. un foglio plastificato (formato A4) con disegni dei poliedri precedenti;
8. il poster "Un mondo di poliedri...";
9. 1 copia delle schede A, B, C e D da fotocopiare;
10. elenco materiale;
11. istruzioni per l'utilizzo del materiale;
12. 1 CD-rom contenente il materiale cartaceo utile per lo svolgimento del laboratorio ed eventuale altro materiale di integrazione.

Per quanto riguarda le immagini, osserviamo subito che in questo fascicolo ne facciamo un largo uso nei commenti pensati per i docenti, anche al di là di quelle inserite effettivamente nel testo: quando nel testo si incontra un numero in grassetto (come **6340**) si tratta di un'immagine reperibile in rete nel sito "Immagini per la matematica" del Centro "matematita", all'indirizzo

http://www.matematita.it/materiale/?p=cat&im=6340.

L'immagine corrispondente si trova comunque anche inserita nel CD-rom (e il numero corrisponde al nome del file), ma si suggerisce - quando è possibile - di usare la rete, dove le immagini sono (molte di più di quelle qui indicate e sono) dotate anche di una didascalia ipertestuale che rimanda dall'una all'altra.

Nello stesso sito si possono trovare altre immagini, oltre a quelle segnalate, sugli stessi temi: si suggerisce ad esempio di consultare la sezione del catalogo dedicata ai poliedri

(vedi http://www.matematita.it/materiale/?p=cat&sc=272)

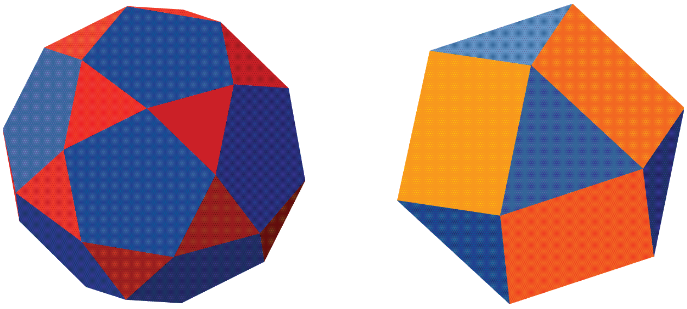
e quella dedicata alle tassellazioni

(vedi http://www.matematita.it/materiale/?p=cat&sc=576).

Nota importante: nel fascicolo, per ogni scheda è riprodotto in nero (con le figure) il testo dato ai ragazzi, mentre in blu sono scritti sia i nostri commenti per gli insegnanti che le risposte attese dagli studenti.

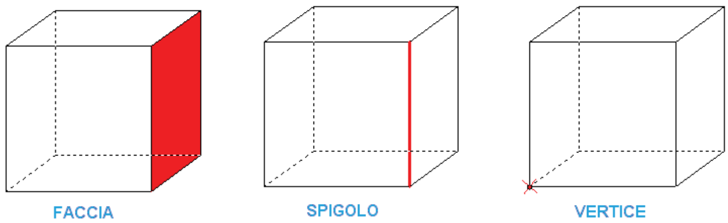
SCHEDA A – GUARDIAMOCI INTORNO

Osservate la seguente immagine e provate a ricostruire gli oggetti tridimensionali raffigurati. Potete utilizzare le tessere colorate.



Gli oggetti in questa figura rappresentano dei POLIEDRI. Sono poliedri gli oggetti costruiti con le tessere come quelle che avete a disposizione nel *kit* in cui tutte le mattonelle usate si incastrano con un'altra mattonella lungo ciascuno dei lati (cioè quelli che "si chiudono").

Sapreste dire che cosa sono VERTICE, SPIGOLO e FACCIA di un poliedro? Per aiutarvi abbiamo inserito un'immagine qui sotto: in ciascuna figura è messo in evidenza uno (e uno solo) dei tre elementi. Scrivete il nome subito sotto:



Non vogliamo in questa fase insistere con le definizioni (in particolare con la definizione di poliedro, che è abbastanza delicata, se si vuole essere precisi come è necessario esserlo dando una definizione), ma vogliamo piuttosto semplicemente "metterci d'accordo" su che cosa intendiamo con le diverse parole coinvolte in questa discussione. Segnaliamo in particolare il fatto che nel linguaggio comune si usa la parola "spigolo" anche a intendere quello che in matematica si chiama "vertice" e ciò può causare problemi ai ragazzi.
Per ricostruire i poliedri in figura ogni gruppo deve avere a disposizione 12 pentagoni, 28 triangoli equilateri e 6 quadrati. Tuttavia può essere utile tenere a disposizione il resto del materiale in dotazione nel kit*, se qualche gruppo volesse provare a costruire altri poliedri.*

Torniamo ai poliedri che avete ricostruito.
Quante facce ha il primo? *32*. E il secondo? *14*.

Che tipo di poligoni sono le facce? E quante ce ne sono per ciascun tipo? Per il primo: *12 pentagoni regolari e 20 triangoli equilateri*. Per il secondo: *6 quadrati e 8 triangoli equilateri*.

Se vi diciamo che il primo poliedro ha 30 vertici e il secondo ne ha 12 ci credete? Perché? Come potete fare per sincerarvene?

Quanti spigoli escono da ogni vertice?
Per il primo *4*.
Per il secondo *4*.

Sapendo quanti sono i vertici e quanti spigoli escono da ogni vertice, potete dire quanti sono in totale gli spigoli senza fare la fatica di contarli? (*Attenzione: ogni spigolo ha DUE vertici*).

Il problema di contare (soprattutto vertici e spigoli) non è un problema banale e non è un caso che qui si chieda di contare essenzialmente solo le facce; per i vertici si danno i numeri e si chiede una conferma; per gli spigoli si cerca di indurre i ragazzi a ottenere questo numero a partire dagli altri senza il conto diretto che non è particolarmente difficile, ma sarebbe un po' lungo. Ottenere il numero degli spigoli dai numeri già trovati richiede un ragionamento non ovvio, perché i ragazzi devono rendersi conto che moltiplicando il numero dei vertici per 4 (il numero degli spigoli che esce da ogni vertice) ottengono il DOPPIO del numero totale di spigoli (proprio perché ogni spigolo ha due vertici e quindi in questa maniera viene contato due volte). Quindi il poliedro di sinistra ha 60 $\left(=\frac{30 \times 4}{2}\right)$ *spigoli e quello di destra ne ha 24* $\left(=\frac{12 \times 4}{2}\right)$.

Se i ragazzi amano questo tipo di problema, è istruttivo lasciarli provare a fare questi conti anche con altri poliedri: in effetti, dover contare le facce, i vertici e soprattutto gli spigoli di un poliedro un po' complicato obbliga a "organizzare" il conto in qualche maniera, il che fa prendere consapevolezza della struttura dell'oggetto, in particolare della sua simmetria.
Se si propone lo stesso problema con altri poliedri, diversi da quelli in figura, occorrerà tener presente che la domanda "Quanti spigoli escono da ogni vertice?" ha senso per questi due poliedri perché da ogni loro vertice esce lo stesso numero di spigoli, cosa che in generale non accade; in altri casi si potrà quindi formulare la domanda chiedendo quanti sono i vertici da cui escono 3 spigoli, quanti quelli da cui ne escono 4 ecc.

È possibile che i ragazzi notino (se hanno già incontrato i poliedri regolari o per esempio se ritornano su questa scheda dopo aver discusso le successive) il fatto che i numeri delle diverse facce di questi poliedri (6-8-12-20) sono proprio i numeri delle facce di quattro dei 5 poliedri regolari. In effetti questo non è un caso: il poliedro a destra nella figura di pagina 8 (**4269**) *si può ottenere da un cubo (o anche*

da un ottaedro) prendendo come vertici i punti medi degli spigoli; il poliedro a sinistra invece (**4264**) *si può ottenere da un dodecaedro (o anche da un icosaedro) prendendo come vertici i punti medi degli spigoli. Le due figure che seguono* (**4262** *e* **4268**) *mostrano insieme cubo e ottaedro (sulla destra) e dodecaedro e icosaedro (sulla sinistra).*
Queste figure sono legate ai poliedri di pagina 8, perché, se si immaginano, per esempio, cubo e ottaedro pieni, il poliedro ottenuto come intersezione dei due è proprio il poliedro sulla destra di pagina 8 (e analogamente per quella sulla sinistra).

MOSCA CIECA

Dividetevi in due gruppi A e B; il gruppo A ha a disposizione l'immagine di un poliedro da descrivere al gruppo B per farglielo ricostruire. Le regole sono poche:

- A non può dire il nome del poliedro,
- A non deve mostrare l'immagine del poliedro a B.

GRUPPO A
Scrivete qui sotto le indicazioni più importanti da dare ai vostri compagni: (…)
Confrontate poi il poliedro costruito dal gruppo B con quello della vostra immagine.
È lo stesso? SÌ NO

Se avete risposto "NO", provate a capire, insieme ai vostri compagni del gruppo B, quale o quali sono state le informazioni che hanno indotto i vostri compagni all'errore e scrivetele: (…)

ORA A E B SI SCAMBIANO I RUOLI.

(…)

Il gioco qui proposto ha lo scopo di focalizzare l'attenzione dei ragazzi sulle conseguenze di un linguaggio ambiguo (e sulla conseguente necessità – in talune circostanze – di un linguaggio rigoroso).
Sappiamo bene come sia pesante per i ragazzi accettare le "pedanterie" di linguaggio tipiche della matematica, in cui a volte un aggettivo o una virgola fuori posto hanno delle conseguenze inaspettate. L'insofferenza per questi aspetti aumenta, ovviamente, se non si è perlomeno consapevoli di cosa può accadere usando un linguaggio ambiguo; questo gioco ha proprio lo scopo di portare alla consapevolezza che, in certe circostanze, non di pedanteria si tratta, ma di precisazioni che sono necessarie per… capirsi.

Il gruppo che descrive il poliedro deve dare le informazioni corrette allo scopo di far indovinare ai compagni di quale forma si tratti, deve quindi essere "onesto" e non dare volutamente indicazioni fuorvianti. Si tratta di un gioco senza vincitori, in cui tutti i ragazzi hanno uno scopo comune.

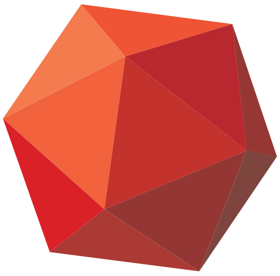
Prima di iniziare il gioco, su ogni tavolo (di 4 o 5 ragazzi) si pone un divisorio sul banco per separare i gruppi A e B (di 2 o 3 ragazzi ciascuno), in modo che il poliedro usato da un gruppo non sia visibile all'altro. Ciascun gruppo estrae quindi una delle schedine dal mazzo di 10 in dotazione; ogni scheda contiene l'immagine di un poliedro che può essere ricostruito con il materiale a disposizione.
Fra il materiale è contenuto anche un foglio A4 plastificato con le 10 immagini dei 10 poliedri utilizzati in queste schedine. A discrezione dell'insegnante questa lista può essere mostrata durante il gioco, oppure soltanto alla fine: si tratta naturalmente di una grossa facilitazione per i ragazzi sapere che il poliedro che devono ricostruire è uno dei 10 di cui vedono l'immagine. Ovviamente, se si opta per questa facilitazione, bisognerà vietare ai ragazzi indicazioni del tipo "si tratta di quello in alto a sinistra".
Per comodità dell'insegnante, riportiamo qui sotto i numeri delle tessere necessarie per ricostruire ciascuno dei 10 poliedri delle schedine.

1	*icosaedro regolare*	**4261**	*20 triangoli equilateri grandi*
2	*antiprisma pentagonale*	**922**	*2 pentagoni e 10 triangoli equilateri piccoli*
3	*poliedro uniforme di tipo (3,3,3,3,4)*	**4254**	*32 triangoli equilateri piccoli e 6 quadrati*
4	*dodecaedro regolare*	**1709**	*12 pentagoni*
5	*poliedro uniforme di tipo (3,4,3,4)*	**4269**	*8 triangoli equilateri piccoli e 6 quadrati*
6	*poliedro uniforme di tipo (4,6,6)*	**4271**	*6 quadrati e 8 esagoni*
7	*ottaedro regolare*	**4265**	*8 triangoli equilateri grandi*
8	*poliedro uniforme di tipo (3,4,5,4)*	**1704**	*20 triangoli equilateri piccoli, 12 pentagoni, 30 quadrati*

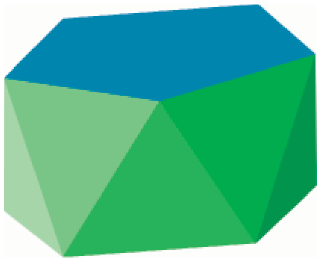
9	*poliedro uniforme di tipo (3,5,3,5)*	**4264**	*20 triangoli equilateri piccoli e 12 pentagoni*
10	*poliedro uniforme di tipo (5,6,6)*	**1702**	*12 pentagoni e 20 esagoni*

Naturalmente stiamo implicitamente assumendo un'ipotesi non irrilevante, senza la quale la richiesta di ricostruire il poliedro a partire dal disegno sarebbe mal posta: nessuno ci dice infatti come è fatto il poliedro "dietro"! Stiamo quindi supponendo che il poliedro continui dietro "allo stesso modo" ed è proprio il fatto che si tratta di poliedri che godono di una certa regolarità che ci autorizza a fare questa ipotesi: se in tutti i vertici che si vedono arrivano un quadrato e due esagoni (come nel poliedro 6) possiamo ipotizzare che anche in quelli che non si vedono arrivino un quadrato e due esagoni.
Ci aspettiamo che i ragazzi diano per scontato questo fatto e, se non sono loro a farlo, non vale la pena sollevare il problema.
Se però qualche ragazzo lo solleva, è bene approfittarne per discutere la cosa esplicitando questa ipotesi (e non mancando di apprezzare la capacità logica e di osservazione di chi ha notato il problema!).
C'è un caso (il 3, poliedro uniforme di tipo 33334) in cui il poliedro può essere realizzato in due forme diverse, speculari una rispetto all'altra.
Per un approfondimento sul tema dei poliedri vedi sito (http://www.matematita.it/personali/index.php?blog=6&cat=80) oppure: Maria Dedò, Forme*, Decibel, Zanichelli, 1999.*
Se i ragazzi mostrano di apprezzare questo gioco, l'insegnante può anche ripeterlo con altre immagini, o scelte dal CD–rom (curando che i ragazzi abbiano a disposizione il materiale per ricostruirli) oppure costruendo prima un poliedro con il materiale a disposizione e fotografandolo. Suggeriamo in ogni caso di non utilizzare per il gioco poliedri troppo semplici (come prismi o piramidi), ma neanche troppo complicati.

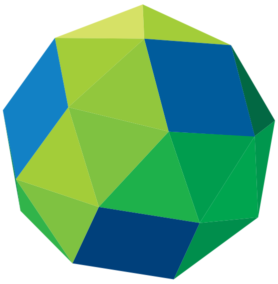
Abbiamo inserito questa attività nella prima scheda di laboratorio, per indurre i ragazzi a prestare attenzione al linguaggio usato e a mettersi d'accordo sui termini. Tuttavia l'attività può essere usata come "jolly", nel senso che potrebbe essere svolta anche in un qualunque altro momento del percorso in laboratorio.



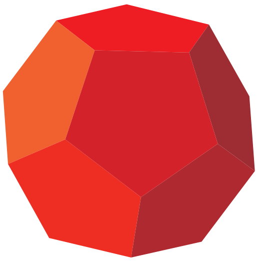
1 - Icosaedro regolare



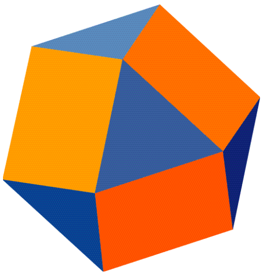
2 - Antiprisma pentagonale



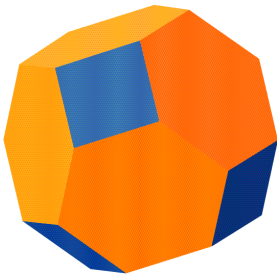
3 - (3,3,3,3,4)



4 - Dodecaedro regolare

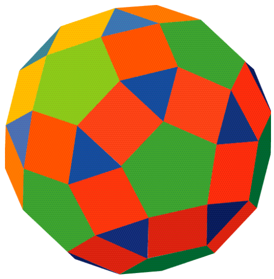


5 - (3,4,3,4)

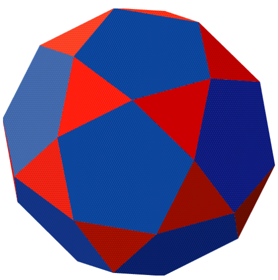


6 - (4,6,6)

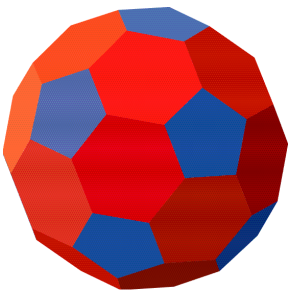
7 - Ottaedro regolare



8 - (3,4,5,4)



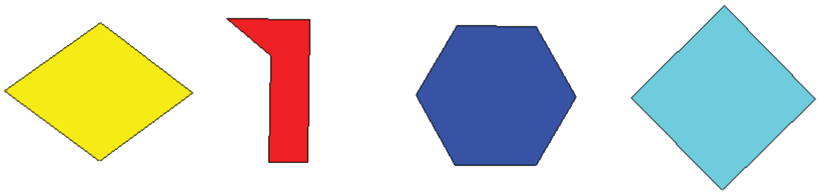
9 - (3,5,3,5)



10 - (5,6,6)

SCHEDA B – POLIEDRI REGOLARI

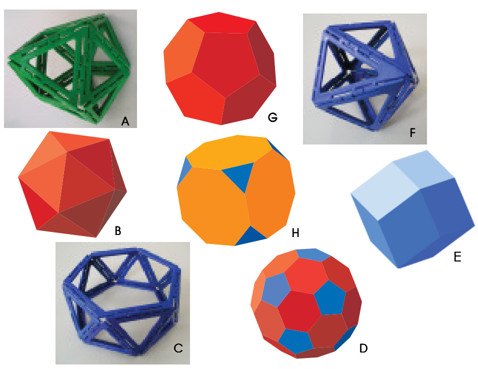
1. Sapete già che cosa si intende per “poligono regolare”: ad esempio, i due poligoni qui sotto a destra sono poligoni regolari (hanno tutti i lati uguali fra loro e anche tutti gli angoli uguali fra loro), mentre i due a sinistra non lo sono.



Vogliamo ora cercare di capire che cosa si può intendere per “poliedro regolare”; avete la possibilità di costruire otto poliedri (di cui avete a disposizione una figura in cui sono identificati con le lettere A,B,C,D,E,F,G,H) e dovrete decidere quali secondo voi si possono chiamare “regolari” e quali no.

Nel kit avete a disposizione il materiale per far costruire ai ragazzi i seguenti poliedri:

A	*un deltaedro*	**10844**	*14 triangoli equilateri*
B	*l’icosaedro regolare*	**4261**	*20 triangoli equilateri*
C	*un antiprisma*	**10839**	*2 esagoni regolari+12 triangoli equilateri piccoli*
D	*un pallone da calcio*	**1702**	*12 pentagoni regolari+20 esagoni regolari*
E	*il dodecaedro rombico*	**4267**	*12 rombi (solo sviluppo in cartoncino)*
F	*una bipiramide*	**10838**	*12 triangoli isosceli (non rettangoli)*
G	*il dodecaedro regolare*	**7954**	*12 pentagoni regolari*
H	*un cubo troncato*	**1701**	*8 triangoli equilateri+6 ottagoni regolari*



Avete la possibilità di farli costruire sia con le tessere di polydron, sia con gli sviluppi in cartoncino. Sugli sviluppi è riportata la lettera corrispondente e suggeriamo di fare riferimento sempre alla lettera, anche quando il poliedro viene costruito con il polydron. Non è importante usare i nomi dei poliedri che vi abbiamo qui inserito, e suggeriamo di non farlo, a meno che siano i ragazzi a chiederlo. Per l'attività successiva è importante che i ragazzi abbiano a disposizione tutti gli 8 oggetti; in linea di principio la cosa migliore sarebbe che ogni gruppo li avesse a disposizione tutti e 8, magari in parte costruiti con il polydron e in parte con il cartoncino.
Nell'organizzare l'attività tenete presente che il dodecaedro rombico si può costruire solo con lo sviluppo in cartoncino; per costruire l'intera serie degli altri sette poliedri servono le seguenti tessere di polydron:

- *48 triangoli equilateri piccoli;*
- *26 pentagoni;*
- *20 esagoni;*
- *12 triangoli isosceli (non rettangoli);*
- *6 quadrati.*

Naturalmente questo richiede di dedicare molto tempo alla costruzione. Un buon compromesso potrebbe essere quello di costruire in una sola copia quelli più complicati, da tenere sulla cattedra a disposizione di tutti i gruppi. Suggeriamo in ogni caso di non sottovalutare l'utilità della costruzione affidata ai ragazzi: costruendo il poliedro, osservandolo e maneggiandolo, i ragazzi ne interiorizzano la struttura e questo risultato giustifica ampiamente la "perdita di tempo"!

Poliedri che volete chiamare regolari: (…)
Poliedri che NON volete chiamare regolari: (…)

2. Ora provate a scrivere una definizione di poliedro regolare; naturalmente dovete fare attenzione a scrivere qualcosa che sia coerente con le scelte che avete fatto qui sopra!
Un poliedro regolare secondo noi è un poliedro in cui:

- *le facce sono poligoni regolari*
- *le facce sono tutte uguali tra loro*
- *da ogni vertice esce lo stesso numero di spigoli.*

Suggeriamo in questo momento di non avanzare alcuna obiezione anche se i ragazzi usano una diversa nozione di regolarità e comprendono fra i regolari dei poliedri che regolari non sono (o viceversa). Piuttosto, occorrerà controllare molto bene che la frase scritta come risposta a questa domanda sia COERENTE con le scelte fatte nella precedente discussione; e, se non lo fosse, occorre farlo notare ai ragazzi che dovranno rivedere o la definizione che hanno dato oppure la classificazione che hanno compiuto.

3. Può darsi che la vostra definizione di poliedro regolare sia diversa da quella data dal gruppo che vi sta accanto.

Noi chiamiamo regolari i poliedri che hanno tutte le facce regolari e uguali tra loro e in cui ad ogni vertice giunge lo stesso numero di facce. È la stessa definizione che avete usato voi?

SÌ NO

Non si tratta qui di insistere sul fatto che la nostra definizione è quella "giusta" e quella data dai ragazzi è (eventualmente) "sbagliata". Una definizione è solo un modo di accordarsi su un nome che faccia da scorciatoia a un concetto, e quindi non è mai "giusta" o "sbagliata". Piuttosto, dobbiamo metterci d'accordo per capire tutti la stessa cosa di fronte allo stesso nome...
Riguardo la definizione di regolari su cui vogliamo accordarci, osserviamo in particolare che la terza condizione permette di evitare di utilizzare una nozione più riposta e delicata come quella di angoloide.
Attenzione, però! Queste due definizioni sono equivalenti solo nel caso di poliedri convessi.

Se la risposta è "NO", riuscite a trovare un poliedro che sarebbe regolare rispetto alla vostra definizione e non rispetto alla nostra, o viceversa? Quale? (…)

È possibile che i ragazzi abbiano richiesto solo che le facce siano tutte uguali fra loro e che siano poligoni regolari, senza richiedere che da ogni vertice esca lo stesso numero di facce (o di spigoli), o altre condizioni equivalenti. SE è questa la definizione usata dai ragazzi, un poliedro che non è regolare rispetto alla nostra definizione e che sarebbe regolare rispetto alla loro è il poliedro A, oppure, per esempio, uno dei 5 nella foto **10836**.

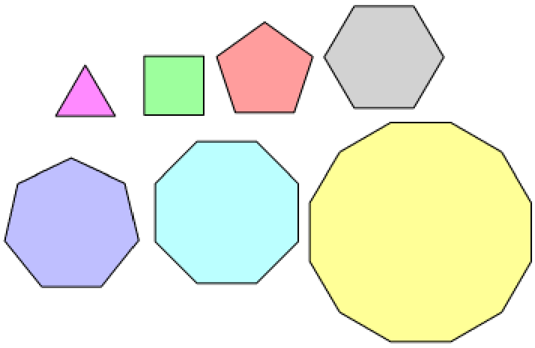
I poliedri nella figura con cui abbiamo iniziato il lavoro con la scheda A sono regolari secondo la nostra definizione?

SÌ NO

*Nella figura che propone questo lavoro sulla definizione di poliedro regolare ci sono due poliedri regolari, il dodecaedro G (***1709***) e l'icosaedro B (***4261***).*
Gli altri non lo sono:

A	**5494**	*ha tutte le facce regolari e uguali fra loro, ma non è vero che da ogni vertice esca lo stesso numero di facce*
C	**922**	*ha tutte le facce regolari ma non uguali fra loro*
D	**1702**	*ha tutte le facce regolari ma non uguali fra loro*
E	**4267**	*ha tutte le facce uguali fra loro ma non regolari*
F	**3121**, *sulla sinistra*	*ha tutte le facce uguali fra loro ma non regolari*
H	**1704**	*ha tutte le facce regolari ma non uguali fra loro.*

4. Una grossa differenza tra poligoni regolari e poliedri regolari è che i poligoni regolari sono infiniti (la figura qui sotto vi aiuta ad immaginarlo), mentre i poliedri regolari non lo sono. Quanti sono?



Provate, con il materiale che avete a disposizione, a costruire dei poliedri regolari (secondo la definizione che abbiamo dato nella prima parte di questa scheda: "chiamiamo regolari i poliedri che hanno tutte le facce regolari e uguali tra loro e in cui ad ogni vertice giunge lo stesso numero di facce"), date a ciascuno di loro un nome (anche di fantasia) e riempite le prime quattro colonne della tabella registrando le vostre osservazioni; nella prima riga, vi suggeriamo noi (con il cubo) in che modo potete farlo.

<u>Attenzione!</u> Potreste dover aggiungere delle righe alla tabella o, viceversa, potrebbero essercene troppe.

POLIEDRO REGOLARE	Numero di spigoli per ogni faccia	Quante facce in ogni vertice?	Tipo di facce	Facce (F)	Vertici (V)	Spigoli (S)
Cubo	4	3	Quadrati	6	8	12
Tetraedro	*3*	*3*	*Triangoli equilateri*	*4*	*4*	*6*
Ottaedro	*3*	*4*	*Triangoli equilateri*	*8*	*6*	*12*
Dodecaedro	*5*	*3*	*Pentagoni regolari*	*12*	*20*	*30*
Icosaedro	*3*	*5*	*Triangoli equilateri*	*20*	*12*	*30*

Siete riusciti a trovarne uno (o più di uno) costruito usando solo:

- triangoli equilateri? ***Sì.*** Quanti ne avete attaccati insieme in ogni vertice? *Ci sono tre possibilità: usare 3, oppure 4, oppure 5 triangoli in ogni vertice.*
- quadrati? ***Sì.*** Quanti ne avete attaccati insieme in ogni vertice? *C'è una sola pos-*

sibilità: usare 3 quadrati in ogni vertice.

- pentagoni regolari? ***Sì.*** Quanti ne avete attaccati insieme in ogni vertice? *C'è una sola possibilità: usare 3 pentagoni in ogni vertice.*
- esagoni regolari? ***No.*** Quanti ne avete attaccati insieme in ogni vertice?
- poligoni regolari con più di 6 lati? ***No.*** Quanti ne avete attaccati insieme in ogni vertice?

Pensate di avere trovato tutti i possibili poliedri regolari?

SÌ	NO

Provate ora a dare una giustificazione alla vostra risposta.

Non è possibile costruire un poliedro regolare usando solo *esagoni,* perché *l'angolo interno è di 120° e attaccandone insieme 3, questi restano sullo stesso piano*.

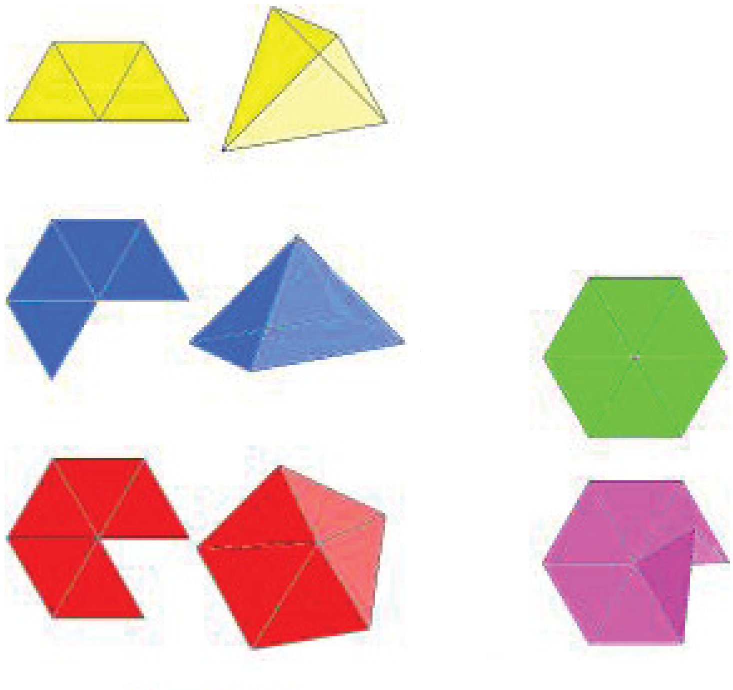
Non è possibile costruire un poliedro regolare usando solo *poligoni regolari tutti uguali tra loro con un numero di lati maggiore o uguale a 7,* perché *l'angolo interno è maggiore di 120° e non possiamo quindi attaccarli insieme neppure a 3 a 3*.

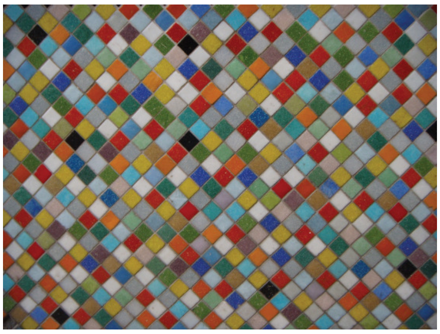
È possibile costruire un poliedro regolare usando solo *pentagoni regolari,* ma non è possibile metterne insieme in ogni vertice un numero diverso da *3,* perché *l'angolo del pentagono è 108° e 108* x *4 > 360*.

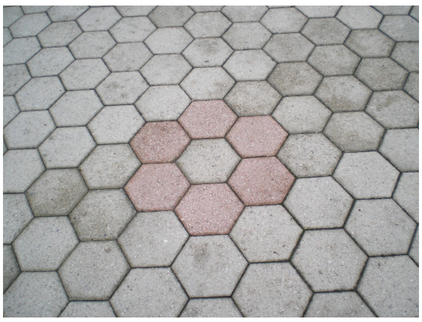
È possibile costruire un poliedro regolare usando solo *quadrati,* ma non è possibile metterne insieme in ogni vertice un numero diverso da *3,* perché *l'angolo del quadrato è 90° e 90* x *4 = 360*.

È possibile costruire un poliedro regolare usando solo *triangoli equilateri,* ma non è possibile metterne insieme in ogni vertice un numero diverso da *3 o 4 o 5,* perché *l'angolo del triangolo equilatero è 60° e 60* x *6 = 360*.

La maniera con cui è stato organizzato il conto dovrebbe suggerire ai ragazzi che non ci sono altre possibilità (vedi anche **1139***): attaccando le tessere di polydron diventa abbastanza evidente il fatto che c'è bisogno che la somma degli angoli che arrivano in un vertice sia strettamente minore di 360°. Quindi, usando triangoli equilateri, 6 sono troppi (si otterrebbe una tassellazione piana (***370, 3758***)), mentre, usando quadrati, già con 4 si ottiene una tassellazione piana (***4600, 10966***). Anche per i pentagoni l'unica possibilità è quella di usarne 3, mentre per gli esagoni già usandone 3 (***7513, 365, 441***) la somma dei tre angoli risulta essere 360° e quindi si ottiene una tassellazione piana.*



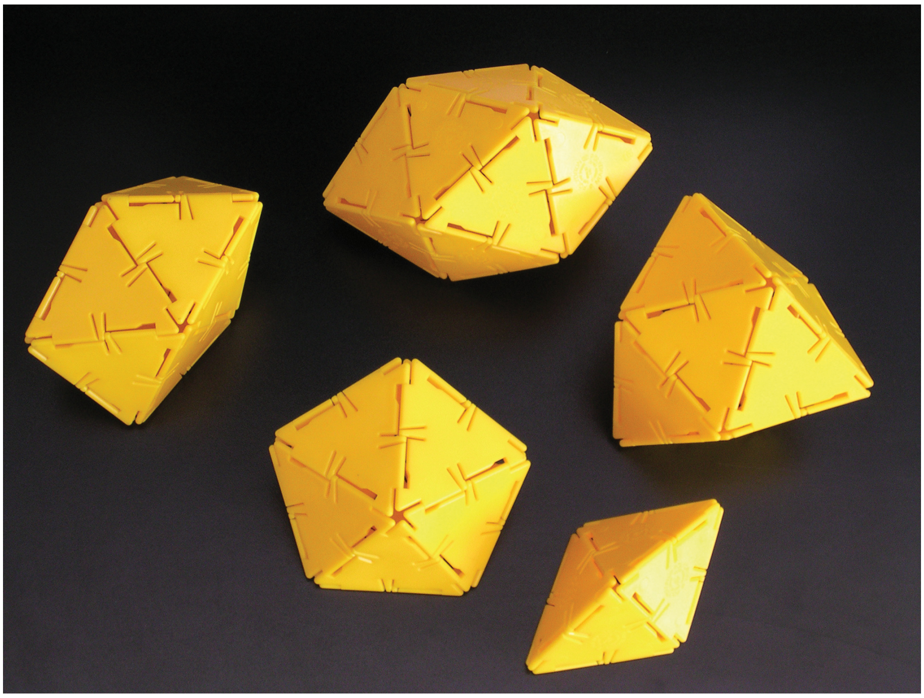




5. Per ciascuno dei poliedri regolari che avete individuato, riempite le ultime colonne della tabella.

Questa attività offre naturalmente all'insegnante lo spunto per un approfondimento legato alla relazione di Eulero, ovvero al fatto che vale V-S+F=2.
Noi qui abbiamo voluto semplicemente mettere le basi per uno studio dei poliedri da questo punto di vista.
*Suggeriamo in ogni caso, nel momento in cui si voglia far osservare ai ragazzi la relazione di Eulero, di non limitarsi ai poliedri regolari ma di far loro osservare la validità di questa relazione su una varietà maggiore di poliedri ... per poi arrivare anche a mostrar loro qualche esempio in cui non vale (**949**): vedi*
http://www.matematita.it/materiale/?p=cat&sc=293.

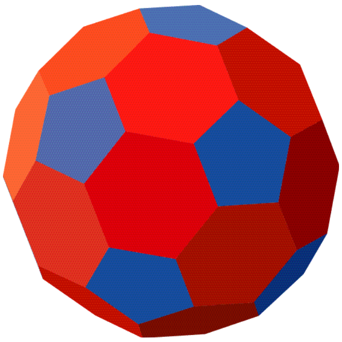
Lasciamo come spunto per un'ultima attività di questa scheda un altro problema (un po' difficile) da proporre ai ragazzi: costruire il maggior numero possibile di poliedri che abbiano le facce tutte uguali fra loro e tutte triangoli equilateri: se richiediamo che il poliedro sia convesso, le sole possibilità sono i 5 nella foto.



SCHEDA C – OLTRE I REGOLARI

1. Vi sarete accorti che i poliedri regolari sono un numero finito, anzi sono davvero pochi; proviamo ad allargare il nostro orizzonte, per esempio proviamo a costruire poliedri che abbiano contemporaneamente le seguenti caratteristiche:

- le facce sono poligoni regolari;
- le facce non devono essere necessariamente tutte uguali tra loro;
- intorno ad ogni vertice arriva "nell'ordine" sempre lo stesso tipo di facce, come accade nel poliedro che assomiglia a un pallone da calcio (vedi la figura qui sotto), nel quale in ogni vertice si incontrano nell'ordine un pentagono, un esagono e ancora un esagono.



Associamo allora a questo solido la lista di numeri 5,6,6 e usiamola come "simbolo" del poliedro.

Provate a costruire con i materiali che avete a disposizione almeno tre esempi diversi di poliedri con queste nuove indicazioni. Con i dati dei poliedri costruiti riempite la tabella seguente. Potete aggiungere alcune righe se volete!

Per comodità dell'insegnante riportiamo nelle due tabelle seguenti i dati relativi a TUTTI i poliedri uniformi (che sono 13, oltre alle due famiglie infinite dei prismi e degli antiprismi). Naturalmente non è particolarmente utile né significativo che i ragazzi li costruiscano tutti: si vuole con questa scheda semplicemente far loro gettare uno sguardo su un tipo di poliedri diversi da quelli che sono più abituati a considerare e che tuttavia sono facili da descrivere (il simbolo analogo al 5,6,6 per il pallone condensa tutte le informazioni che occorrono per ricostruire l'oggetto) e comprendono alcuni esempi molto utilizzati (il pallone da calcio, per l'appunto!).

Per organizzare il lavoro suggeriamo (per aumentare le possibilità a disposizione dei ragazzi) di NON dividere in parti uguali il materiale fra i vari gruppi, ma piuttosto di dare per esempio tutti gli ottagoni a un gruppo e più esagoni a un altro, in modo da far sì che alcuni gruppi abbiano il materiale per costruire certi poliedri e altri per costruirne altri. Il materiale a disposizione non consente di realizzare tutte le costruzioni contemporaneamente.
Le tabelle che alleghiamo qui sotto possono essere utili (all'insegnante), proprio allo scopo di dividere il materiale nel modo migliore.

Non ci aspettiamo, né del resto sarebbe particolarmente importante, che i ragazzi trovino tutti i poliedri di questo tipo; ci aspettiamo che trovino i prismi, magari anche gli antiprismi e gli altri poliedri che hanno già incontrato in una attività precedente.

Numero di facce per ogni vertice	Tipi di facce per ogni vertice	Simbolo
3	Pentagoni e esagoni	5,6,6
3	*Quadrati e n-goni*	*4,4,n prisma*
4	*Triangoli e n-goni*	*3,3,3,n antiprisma*
3	*Triangoli e esagoni*	*3,6,6*
3	*Quadrati e esagoni*	*4,6,6*
4	*Triangoli e quadrati*	*3,4,3,4*
4	*Triangoli e pentagoni*	*3,5,3,5*
3	*Triangoli e ottagoni*	*3,8,8*
3	*Triangoli e decagoni*	*3,10,10*
4	*Triangoli e quadrati*	*3,4,4,4*
4	*Triangoli, quadrati e pentagoni*	*3,4,5,4*
3	*Quadrati, esagoni e ottagoni*	*4,6,8*
3	*Quadrati, esagoni e decagoni*	*4,6,10*
5	*Triangoli e quadrati*	*3,3,3,3,4*
5	*Triangoli e pentagoni*	*3,3,3,3,5*

È possibile costruire un poliedro 4,4,3? ………………
E un 4,4,6? ……………..
E un 3,4,3,4? ……………
E un 3,6,3,6? ……………
Se riuscite a costruirlo, dite se l'avevate già incontrato in precedenza. Se non riuscite a costruirlo, cercate di capire se è davvero impossibile e per quale motivo. (….)

Il (4,4,3) è il prisma a base triangolare
Il (4,4,6) è il prisma a base esagonale
Il (3,4,3,4) è il poliedro a sinistra nella prima figura della scheda A.
Invece non esiste un poliedro di tipo (3,6,3,6): infatti sommando due angoli di un triangolo equilatero e due di un esagono regolare si ottiene 360°, quindi unendo intorno a un vertice due triangoli equilateri e due esagoni regolari i quattro poligoni risultano complanari.

2. Per ciascuno dei poliedri che avete appena costruito, riportate in tabella il numero V dei vertici, S degli spigoli e F delle facce.

Simbolo	V	S	F	Specifica delle facce
5,6,6	*60*	*90*	*32*	*12 pentagoni e 20 esagoni*
4,4,n	*2n*	*3n*	*n+2*	*2 n-goni e n quadrati*
3,3,3,n	*2n*	*4n*	*2n+2*	*2 n-goni e 2n triangoli*
3,6,6	*12*	*18*	*8*	*4 triangoli e 4 esagoni*
4,6,6	*24*	*36*	*14*	*6 quadrati e 8 esagoni*
3,4,3,4	*12*	*24*	*14*	*8 triangoli e 6 quadrati*
3,5,3,5	*30*	*60*	*32*	*20 triangoli e 12 pentagoni*
3,8,8	*24*	*36*	*14*	*8 triangoli e 6 ottagoni*
3,10,10	*60*	*90*	*32*	*20 triangoli e 12 decagoni*
3,4,4,4	*24*	*48*	*26*	*8 triangoli e 18 quadrati*
3,4,5,4	*60*	*120*	*62*	*20 triangoli, 30 quadrati e 12 pentagoni*
4,6,8	*48*	*72*	*26*	*12 quadrati, 8 esagoni e 6 ottagoni*
4,6,10	*120*	*180*	*62*	*30 quadrati, 20 esagoni e 12 decagoni*
3,3,3,3,4	*24*	*60*	*38*	*32 triangoli e 6 quadrati*
3,3,3,3,5	*60*	*150*	*92*	*80 triangoli e 12 pentagoni*

I dati di Vertici Spigoli e Facce che riportiamo in questa tabella per tutti i poliedri uniformi ***NON*** *servono per le schede successive, e* ***NON*** *è importante che i ragazzi li conoscano; vengono inseriti qui solo per comodità dell'insegnante, sia per il caso in cui volesse riprendere questo materiale per un approfondimento dedicato alla relazione di Eulero (V-S+F=2), sia per valutare la possibilità di accontentare i ragazzi nel caso in cui siano loro a insistere per costruire un certo poliedro, sia per dividere nel modo migliore il materiale fra i diversi gruppi.*

SCHEDA D – FACCIAMO UN PAVIMENTO

1. Noi chiamiamo tassellazioni regolari quelle ottenute unendo fra loro poligoni regolari dello stesso tipo in modo da restare sul piano. Con il materiale a disposizione provate a costruire delle tassellazioni regolari.
Per ciascuna di esse scrivete nella tabella qui sotto con quali poligoni l'avete realizzata e quanti di questi poligoni si uniscono in un vertice.

Tipo di poligono regolare utilizzato	N° di facce che si uniscono in un vertice
Triangolo equilatero	*6*
Quadrato	*4*
Esagono	*3*

Ne avete trovata una (o più di una) usando solo triangoli equilateri? ***Sì, solo una.***
Quanti ne avete attaccati insieme in ogni vertice? ***6.***
Ne avete trovata una (o più di una) usando solo quadrati? ***Sì, solo una.***
Quanti ne avete attaccati insieme in ogni vertice? ***4.***
Ne avete trovata una (o più di una) usando solo pentagoni regolari? ***No.***
Quanti ne avete attaccati insieme in ogni vertice?
Ne avete trovata una (o più di una) usando solo esagoni regolari? ***Sì, solo una.***
Quanti ne avete attaccati insieme in ogni vertice? ***3.***
Ne avete trovata una (o più di una) usando solo poligoni regolari con più di 6 lati? ***No.***
Quanti ne avete attaccati insieme in ogni vertice?
Pensate di aver trovato TUTTE le possibili tassellazioni regolari del piano? (…)
Se sì, provate a dire perché secondo voi non ce ne sono altre. (…)

*Si possono trovare nel CD–rom delle foto di tassellazioni regolari come ad esempio quelle delle foto a pag. 19 di questo fascicolo (***7513***, ***370***, ***10966***).*

Le domande qui sopra si pongono l'obiettivo di portare i ragazzi verso la dimostrazione del fatto che queste tre sono le uniche tassellazioni regolari possibili. In effetti la somma degli angoli che arrivano in ogni vertice deve essere 360°, quindi l'angolo del poligono regolare deve essere un sottomultiplo intero di 360°. Gli unici casi possibili sono allora quelli del triangolo equilatero (60° = 360°/6), del quadrato (90° = 360°/4) e dell'esagono regolare (120° = 360°/3). Non ci sono altre possibilità, perché l'angolo del pentagono regolare (108°) non è un sottomultiplo intero di 360° e, se il poligono ha 7 o più lati, l'angolo interno è maggiore di 120° (mentre i poligoni da mettere insieme intorno a un vertice per ottenere una tassellazione devono essere almeno 3).

Come possibile approfondimento per le classi terze si potrebbe chiedere ai ragazzi perché nella definizione di poliedro regolare era necessario richiedere che da ogni vertice uscisse lo stesso numero di spigoli e qui non lo è. In effetti, dovendo restare sul piano, sappiamo che la somma degli angoli che arrivano in un dato vertice è ***UGUALE*** *a 360° e quindi, una volta fissato il poligono regolare che stiamo usando (ad esempio, il triangolo equilatero), è determinato il numero dei poligoni che si incontrano in un vertice (6). Invece, costruendo un poliedro, sappiamo solo che questa somma è* ***MINORE*** *di 360° e quindi questo numero (<6) potrebbe valere 3 o 4 o 5: se vogliamo la regolarità, dobbiamo imporre che sia lo stesso in ogni vertice perché questo fatto non è automatico.*

2. Torniamo sull'ultima domanda della prima attività. Provate a completare le seguenti tabelle (noi abbiamo compilato la prima colonna):

POLIGONI REGOLARI

Numero di lati	3	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
Ampiezza degli angoli al vertice in gradi	60°	*90°*	*108°*	*120°*	*128,5...°*	*135°*	*140°*	*144°*
Ampiezza degli angoli al vertice come frazione dell'angolo giro	1/6	*1/4*	*3/10*	*1/3*	*5/14*	*3/8*	*7/18*	*2/5*

Ricordatevi che l'angolo di un poligono regolare di *n* lati vale
$\alpha = (n-2)\cdot 180°/n$.

Abbiamo qui inserito nella tabella una seconda riga, in cui si misura l'angolo come frazione dell'angolo giro anziché in gradi. In effetti, è opportuno notare come tutti i problemi posti in questa scheda possono essere riformulati in modo da diventare altrettanti problemi sulle frazioni. Così, individuare i diversi tipi di tassellazioni regolari corrisponde a individuare quante e quali, nella famiglia di frazioni del tipo $(n-2)/2n$*, si possono scrivere come frazioni 1/k con numeratore 1. E il problema successivo, sulla individuazione delle tassellazioni uniformi, corrisponde a cercare alcune fra le frazioni della seconda riga nella tabella precedente che diano per somma 1.*

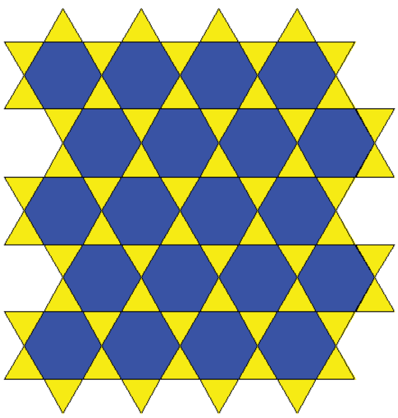
TASSELLAZIONI REGOLARI

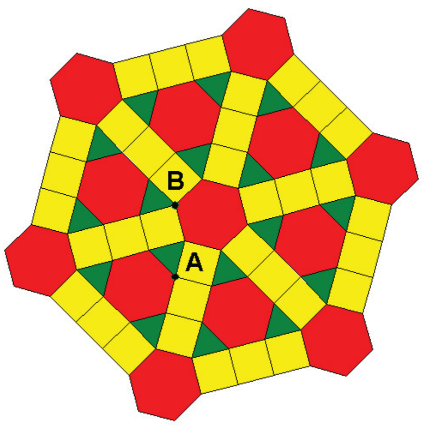
Numero di poligoni per ogni vertice	3	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*
Ampiezza dell'angolo al vertice del poligono	360°/3 = 120°	*360°/4 = 90°*	*360°/5 = 72°*	*360°/6 = 60°*	*360°/7 =51,4…° < 60°*	*360°/8 = 45° <60°*
Esiste un poligono regolare con questo angolo? Se sì, quale?	Sì, esagono	*Sì, quadrato*	*No*	*Sì, triangolo equilatero*	*No*	*No*

Riuscite a dedurre dalle tabelle quante sono le possibili tassellazioni regolari? (…)
Perché? Provate a scrivere il vostro ragionamento:
Le avevate trovate tutte? (…)

In realtà si torna qui sullo stesso ragionamento visto poco sopra, si tratta solo di due maniere diverse di dire la stessa cosa. Prima si prendeva la mattonella corrispondente a un dato poligono e si osservava che, ripetuta un certo numero di volte, doveva riempire l'angolo giro intorno a un vertice (e quindi un multiplo intero dell'angolo interno del poligono doveva essere l'angolo giro); mentre qui si parte dall'angolo giro e si osserva che dividendolo in un certo numero di parti uguali si ritrova l'angolo di un poligono regolare.
Nonostante si tratti dello stesso ragionamento, non è affatto escluso che ci siano ragazzi per cui uno dei due casi è facilmente comprensibile e l'altro presenta delle difficoltà (ed è proprio questo il motivo per presentarli entrambi).

3. Proviamo ora a ridurre le richieste. Non ci interessa più che le tessere siano uguali tra loro, vogliamo solo che siano poligoni regolari; però richiediamo anche che intorno ad ogni vertice arrivi nell'ordine sempre lo stesso tipo di facce: ad esempio, la figura qui sotto a sinistra corrisponde alle nostre richieste, mentre la figura a destra no: sapreste dire perché? (un suggerimento: osservate cosa succede intorno ai punti A e B)





Nel vertice A arrivano, nell'ordine, un esagono, poi due quadrati fra loro adiacenti e poi un triangolo equilatero; invece nel vertice B arrivano un esagono, un quadrato, un triangolo equilatero e un altro quadrato. È diverso quindi l'ordine con cui i poligoni si dispongono intorno ai punti A e B, anche se si tratta sempre dello stesso tipo di poligoni.

In ogni vertice della tassellazione della figura a sinistra si incontrano nell'ordine, un triangolo equilatero, un esagono e ancora un triangolo equilatero e un esagono; quindi associamo a questa figura il simbolo costituito dalla lista di numeri **3,6,3,6**.
Provate a costruire con il materiale che avete a disposizione qualche altro esempio di tassellazioni piane di questo tipo (le chiamiamo tassellazioni uniformi). Con i dati delle tassellazioni che avete realizzato riempite la tabella seguente. Potete aggiungere alcune righe se volete!

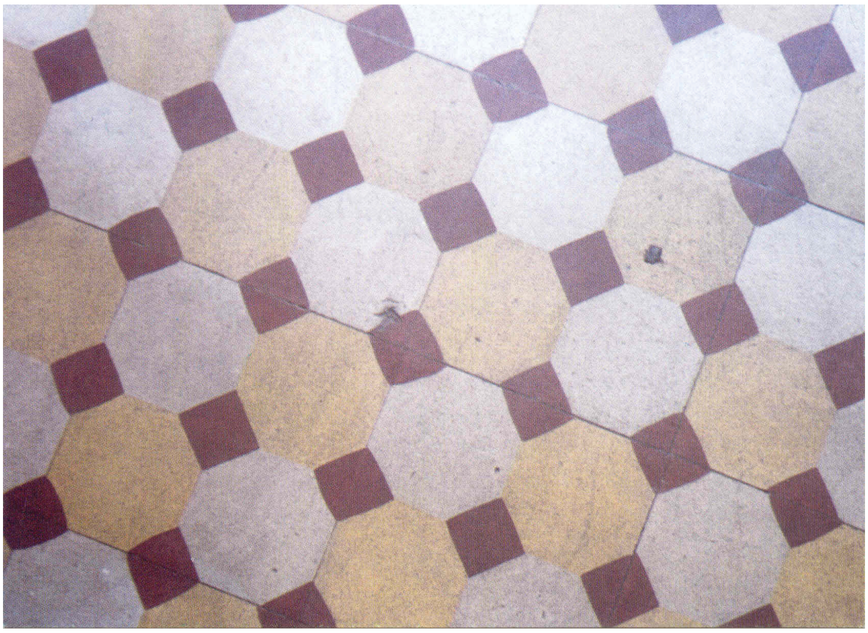
Facce per ogni vertice	Tipi di facce per ogni vertice	Simbolo
4	Triangoli equilateri e esagoni regolari	3,6,3,6
3	*Quadrati e ottagoni regolari*	*4,8,8*
3	*Triangoli equilateri e dodecagoni regolari*	*3,12,12*
3	*Quadrati, esagoni regolari e dodecagoni regolari*	*4,6,12*
4	*Triangoli equilateri, quadrati e esagoni regolari*	*3,4,6,4*
5	*Triangoli equilateri e quadrati*	*3,3,3,4,4*
5	*Triangoli equilateri e quadrati*	*3,3,4,3,4*
5	*Triangoli equilateri e esagoni regolari*	*3,3,3,3,6*

Nella tabella (solo per comodità del docente, non certo per dirlo ai ragazzi!) riportiamo tutti e soli i casi possibili di tassellazioni uniformi (oltre alle tre regolari già ottenute).

Dal punto di visto organizzativo, anche qua (come per la scheda C) converrà in prima battuta non dividere equamente il materiale fra i vari gruppi, ma lasciare che alcuni abbiano più poligoni di un tipo e altri più di un altro tipo.

N.B. Il materiale a disposizione NON comprende i dodecagoni regolari, quindi non sarà possibile costruire con le tessere di polydron le tassellazioni (3,12,12) e (4,6,12).

*Ci aspettiamo che i ragazzi trovino perlomeno la tassellazione di quadrati e ottagoni, che spesso viene usata nelle pavimentazioni e che si può vedere qui sotto (**1748**).*



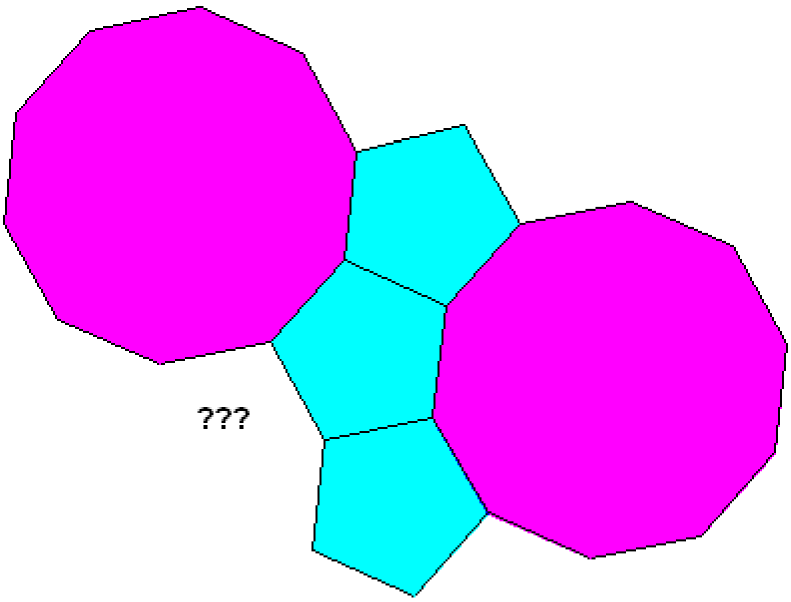
*Suggeriamo di **NON** insistere affinché le trovino tutte; lasciamo qui i dati solo pensando che possano essere utili per soddisfare le curiosità di alcune classi in particolare.*
Piuttosto, vogliamo fare un'osservazione.
Ad ognuna di queste tassellazioni corrisponde un'opportuna scelta delle frazioni del tipo (n-2)/2n che avevamo elencato al punto 2 della scheda.
Sono tante frazioni quante ne indica il numero scritto nella prima colonna della tabella e danno per somma 1.

Riassumiamo queste osservazioni:

Facce per ogni vertice		*Simbolo*
4	*1/6 + 1/3 + 1/6 + 1/3 = 1*	*3,6,3,6*
3	*1/4 + 3/8 + 3/8 = 1*	*4,8,8*
3	*1/6 + 5/12 + 5/12 = 1*	*3,12,12*
3	*1/4 + 1/3 + 5/12 = 1*	*4,6,12*
4	*1/6 + 1/4 + 1/3 + 1/4 = 1*	*3,4,6,4*
5	*1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/4 + 1/4 = 1*	*3,3,3,4,4*
5	*1/6 + 1/6 + 1/4 + 1/6 + 1/4 = 1*	*3,3,4,3,4*
5	*1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/3 = 1*	*3,3,3,3,6*

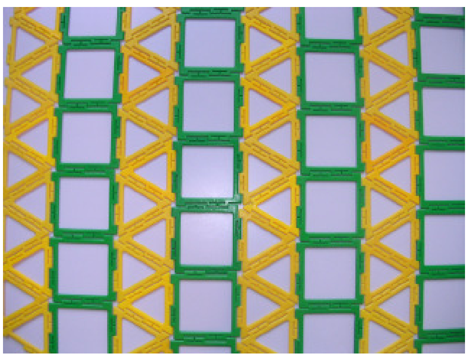
In realtà ci sono anche altre maniere di scrivere 1 come somma di alcune frazioni di quella lista, per esempio 3/10 + 3/10 + 2/5 = 1, il che corrisponde al fatto che due pentagoni regolari e un decagono regolare riempiono completamente l'angolo

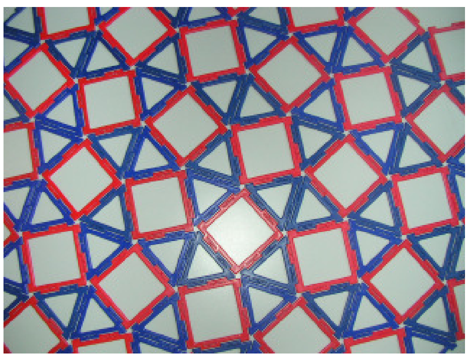
giro intorno a un punto. Nelle classi terze o, comunque, nelle classi più interessate suggeriamo di provare a chiedere ai ragazzi di costruire una tassellazione uniforme usando pentagoni e decagoni.
I ragazzi dovrebbero accorgersi abbastanza facilmente che questa combinazione di mattonelle non si estende a una tassellazione uniforme di tutto il piano (se provate a "continuare" vi accorgete che non riuscireste a procedere in maniera coerente, come è suggerito dalla seguente figura).



È possibile costruire una tassellazione uniforme usando solo quadrati e triangoli equilateri? (…)
E pentagoni regolari e triangoli equilateri? (…)
Sapete dire perché? (…)

Ci sono due diverse possibilità che utilizzano triangoli e quadrati e ci aspettiamo che i ragazzi ne trovino almeno una, magari aiutati da questa domanda.

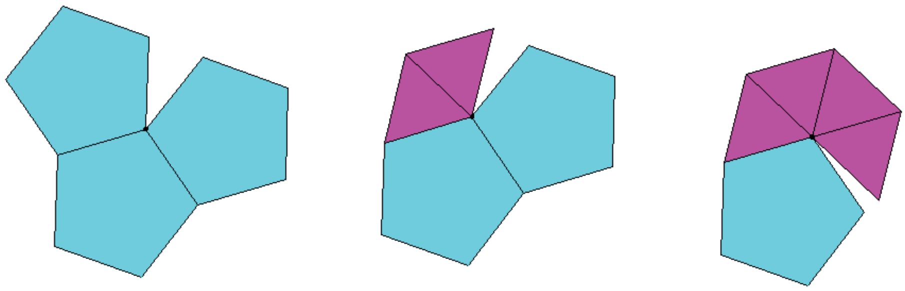




Non è possibile invece utilizzare solo pentagoni e triangoli. Se vogliamo usare le frazioni, possiamo osservare che occorrerebbe trovare un multiplo intero di 1/6 e un multiplo intero di 3/10 la cui somma dia 1. Ma:

- *1-3/10 = 7/10 e 7/10 non è un multiplo intero di 1/6*
- *1-6/10 = 4/10 = 2/5 e 2/5 non è un multiplo intero di 1/6*
- *1-9/10 = 1/10 e 1/10<1/6 quindi 1/10 non è un multiplo intero di 1/6.*

La seguente figura può essere più convincente rispetto ai conti con le frazioni:



LIBRI E SITI

1. Alcuni libri che ci sono stati utili

Il testo di riferimento per gli aspetti teorici sottostanti la costruzione del percorso del *kit* è:

Maria Dedò, *Forme*, Decibel, Zanichelli, 1999

In particolare i capitoli 3, 4, 5.

Per chi non ha paura dell'inglese, uno splendido libro è

Peter Cromwell, *Polyhedra*, Cambridge University Press, 1997

Non si tratta di un libro facile da leggere, ma è una vera miniera e se ne possono ricavare moltissimi spunti interessanti.

Un libro in italiano molto bello, che non riguarda solo i poliedri, è

Hugo Steinhaus, *Matematica per istantanee*, Zanichelli, 1994

In particolare nei capitoli 7 e 8 si trovano esempi legati al mondo dei poliedri.

Segnaliamo infine un omaggio a H.S.M. Coxeter

Siobhan Roberts, *Il re dello spazio infinito*, Rizzoli, 2006

Non si tratta di un libro di matematica: l'autore è un giornalista e tratteggia qui la figura di H.S.M. Coxeter, un matematico del '900 il cui nome è legato a tanti risultati anche sui poliedri.

2. Alcuni siti *web* dove si possono trovare spunti e idee sul tema dei poliedri

http://www.mathconsult.ch/showroom/unipoly/list-graph.html
un poster con tutti i poliedri uniformi (compresi quelli stellati)

http://www.atractor.pt/mat/Polied/poliedros-e.htm
una raccolta di rappresentazioni virtuali di poliedri

http://www.cs.mcgill.ca/~sqrt/unfold/unfolding.html
vi si trovano sviluppi (virtuali) di poliedri che si aprono e si chiudono

http://www.korthalsaltes.com/
vi si trovano gli sviluppi di un notevole numero di poliedri in una forma che si può scaricare e stampare per ricostruirli in cartoncino

E naturalmente anche il già citato sito "Immagini per la matematica" del Centro "matematita":
http://www.matematita.it/materiale/
dove si può in particolare esplorare la sezione dedicata ai poliedri:
http://www.matematita.it/materiale/?p=cat&sc=272

Per continuare il discorso sui poliedri:

matematita

Centro interuniversitario
di ricerca per la comunicazione
e l'apprendimento informale
della matematica

FASCICOLO INTRODUTTIVO al *kit* di laboratorio

DIAMO FORMA ALLA GEOMETRIA:
GRANDE O PICCOLO?

per classi della scuola secondaria di I grado

di Alessandra Brena e Ombretta Locatelli

REFERENZE FOTOGRAFICHE

Le immagini di pag. 8, 10, 13 e 21 sono di Roberta Granà.
La foto in alto a sinistra a pag. 19 è di Paola Cereda.
La foto in alto a destra a pag. 19 è di Serena Barbanotti.

Al *kit* è allegato il poster "Un mondo di poliedri..." (progetto grafico di Roberta Granà).