

FASCICOLO INTRODUTTIVO al *kit* di laboratorio

## **SIMMETRIA: DAGLI SPECCHI ALLA CARTA**

per classi della scuola secondaria di I grado

di Alessandra Brena e Ombretta Locatelli



*Collana Quaderni di Laboratorio*

*Titolo* Simmetria: dagli specchi alla carta – per classi della scuola secondaria di I grado

*di* Alessandra Brena e Ombretta Locatelli

*Progetto grafico e impaginazione di* Marianna Lorini

IV versione – febbraio 2011

Questo fascicolo è stato pensato per essere usato con il *kit* di laboratorio cui si riferisce



## SOMMARIO

INTRODUZIONE	1
PERCHÉ LA SIMMETRIA	1
IL MATERIALE CONTENUTO NEL KIT	2
UN'OSSERVAZIONE SULLE IMMAGINI DEL TESTO	2
I CONTENUTI	3
OSSERVARE LA SIMMETRIA	4
IL LABORATORIO	5
IL GIOCO DELLA TOMBOLA	6
I POSSIBILI PERCORSI E TEMPI	8
I METODI	8
SCHEDA A – GIOCARE CON L'ALFABETO	11
SCHEDA B – COSTRUZIONI ALLO SPECCHIO	16
SCHEDA C – PIEGATURA DELLA CARTA	23
REFERENZE FOTOGRAFICHE	25





## INTRODUZIONE

In questo fascicolo sono descritte diverse attività che è possibile svolgere con il materiale del *kit* “Simmetria: dagli specchi alla carta”. Queste attività riguardano la simmetria e sono calibrate per le diverse classi della scuola secondaria di primo grado: esse comprendono momenti osservativi e momenti in cui si richiede ai ragazzi un’azione più sistematica, che li avvii alla formalizzazione di alcuni fra i concetti incontrati.

## PERCHÉ LA SIMMETRIA

L’attenzione che abbiamo rivolto a questo tema non nasce per caso: da parecchi anni è stabilmente allestita presso il Dipartimento di Matematica dell’Università degli Studi di Milano un’intera esposizione interattiva – *Simmetria, giochi di specchi* – dedicata appunto alla simmetria. Questa mostra è pensata per studenti di ogni ordine di scuola, da quella dell’infanzia all’università. Essa risulta interessante anche per il pubblico adulto extra-scolastico, a testimonianza del fatto che la simmetria può essere studiata a livelli di approfondimento molto diversi, dal momento che si tratta di un nodo concettuale assai profondo in matematica (e non solo in matematica!), che rappresenta, nelle situazioni più disparate, una chiave di analisi e di interpretazione della realtà.



### IL MATERIALE CONTENUTO NEL KIT

Il *kit* comprende:

1. questo fascicolo di presentazione del laboratorio;
2. un CD-rom contenente il materiale cartaceo utile per lo svolgimento del laboratorio ed eventuale altro materiale di integrazione;
3. cinque set di specchi incidenti;
4. cinque specchi singoli;
5. sei cartelle della tombola plastificate, un pacchetto di cartellini da estrarre e un sacchetto di fagioli;
6. sei specchietti;
7. cinque poster plastificati formato A4;
8. 26 schedine plastificate con le lettere dell'alfabeto, 10 schedine plastificate con i numeri da 0 a 9 e 6 schedine con simboli per la prima attività della scheda A;
9. 5 serie di 9 schedine con i quadrilateri per la prima attività della scheda B;
10. 5 sacchetti contenenti tessere di gomma crepla per la prima attività della scheda B;
11. un set di 30 schedine a colori plastificate per la seconda attività della scheda B;
12. un set di 30 schedine in bianco e nero plastificate per la seconda attività della scheda B.

### UN'OSSERVAZIONE SULLE IMMAGINI DEL TESTO

In questo fascicolo si fa largo uso di immagini sia per illustrare un concetto sia per mostrare più esempi possibili di una stessa situazione. Per ovvie questioni di spazio, non tutte le immagini citate sono state qui riprodotte; tutte, comunque, sono indicate con un numero in grassetto: 729, per esempio, indica un'immagine reperibile in rete sul sito Immagini per la matematica del Centro matematica, all'indirizzo

<http://www.matematita.it/materiale/index.php?p=cat&im=729>.

(Come controllo, verificate che al numero **729** corrisponde la figura di pag. 10 di questo fascicolo).

Nello stesso sito si possono trovare molte altre immagini sul tema della simmetria, tutte dotate di una didascalia ipertestuale che spesso rimanda dall'una all'altra.

Particolarmente utile può essere consultare la sezione del sito dedicata in generale alla simmetria

(vedi <http://www.matematita.it/materiale/index.php?p=cat&sc=3>)

e quella dedicata più specificatamente ai rosoni

(vedi <http://www.matematita.it/materiale/index.php?p=cat&sc=121>).



Invece, a partire da

<http://www.matematita.it/materiale/index.php?p=cat&sc=640>,

si possono trovare molte immagini evocative di simmetria suddivise in base al soggetto rappresentato.

Nello stesso sito si possono trovare sia degli approfondimenti riguardanti la simmetria sia dei percorsi costruiti a partire dalle immagini (vedi *menù* sulla sinistra della *home page*).



## I CONTENUTI

Il *kit* è pensato per introdurre gli studenti alla nozione di trasformazione geometrica e a quella di simmetria di una figura (piana).

Non si prevedono dei prerequisiti particolari, per nessuna delle attività proposte, in quanto si ritiene che le stesse questioni possano essere affrontate e discusse a livelli diversi di maturità e di conoscenze matematiche.

Sarà quindi l'insegnante a decidere come vuole inserire il kit nel percorso complessivo della classe, tenendo presente che le diverse attività si prestano sia a costituire una introduzione al tema delle trasformazioni e della simmetria per ragazzi che non l'hanno ancora incontrato, sia a svolgere una funzione di ricapitolazione, di ripensamento e di rinforzo per i ragazzi che l'abbiano già studiato.



### OSSERVARE LA SIMMETRIA

Può essere utile far precedere il momento vero e proprio del laboratorio (con l'uso delle schede *ad hoc*) da una fase in cui si cerchino diverse occasioni per stimolare i ragazzi a osservare la simmetria intorno a loro. Fanno riferimento a questa esigenza le cinque schede che contengono esempi di simmetria tratti da differenti contesti (natura, arte, vita quotidiana, ...) e che hanno l'obiettivo di richiamare alla mente diverse situazioni nelle quali si ha modo di "osservare" la simmetria, magari inconsapevolmente.

L'insegnante che vuole raccogliere questo spunto e approfondire questa ricerca potrebbe chiedere ai ragazzi (magari in un secondo momento) di cercare e raccogliere immagini evocative di simmetria. La nostra esperienza suggerisce che in tal caso conviene, per non disperdere troppo l'attenzione, restringersi a un particolare ambito.

La scelta degli ambiti è davvero molto ampia: si può andare dalle carte da gioco ai cerchioni delle automobili, dai pizzi della nonna ai cartelli stradali, ... Alcuni esempi si possono trovare partendo dal già citato indirizzo

<http://www.matematita.it/materiale/index.php?p=cat&sc=640>,

ma è bello anche lasciare che i ragazzi si sbizzarriscano a cercare dove preferiscono: tanto la simmetria è davvero presente ovunque!

Naturalmente, nella successiva fase di analisi, bisognerà usare una certa cautela con le immagini "reali", e ciò per due ordini di motivi. Innanzitutto perché la simmetria "in natura" non è mai perfetta: un fiore come quello qui a fianco (578) ci comunica fortemente un'impressione di simmetria, e più particolarmente di una simmetria dello stesso tipo del pentagono regolare, però... se poi lo mettiamo davvero sotto uno specchio (1493) ci accorgiamo che la simmetria è solo approssimativa.



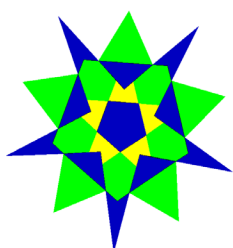
Proprio questo è il motivo per cui nel CD-rom le immagini sono suddivise in due diverse cartelle: "classificare" e "osservare". Le immagini della prima cartella sono quelle che abbiamo usato (o che comunque si potrebbero usare per arricchire la varietà degli esempi a disposizione) nelle diverse attività proposte (laboratorio e tombola) per testare la presenza di un asse di simmetria con uno specchio: per fare ciò occorre che la simmetria non sia soltanto approssimativa! Le immagini della seconda cartella, invece, sono da un certo punto di vista molto più suggestive perché non sono disegni "geometrici", ma sono fotografie prese da diversi contesti. Ma proprio per questo motivo presentano spesso della ambiguità o dei dettagli che possono far variare la simmetria a seconda che li prendiamo o non li prendiamo in considerazione, e che quindi le rendono non adatte





a un'attività di classificazione. Coerentemente con questa osservazione, solo le immagini della prima cartella ("classificare") sono presentate suddivise in sottocartelle, corrispondenti a diversi tipi di simmetria.

Per dare un'idea di tali differenze, fra le due coppie di immagini che seguono, quelle a sinistra sono prese dalla cartella "classificare", mentre quelle a destra dalla cartella "osservare".



Un secondo motivo per cui occorre usare cautela con le immagini reali è il fatto che riproducono oggetti tridimensionali: ciò rischia di creare confusione fra la simmetria (3d) dell'oggetto (ad esempio il fiore) e la simmetria (piana) della fotografia dell'oggetto (che oltretutto dipenderà naturalmente dal punto di vista da cui è stata scattata la foto).

## IL LABORATORIO

Per l'attività di laboratorio sono state predisposte apposite schede di lavoro (da stampare dal CD-rom). Tali schede esplorano la simmetria piana in tre contesti diversi: il primo (scheda A) utilizza l'alfabeto e analizza quindi la simmetria prima delle lettere e poi delle parole; il secondo (scheda B) parte dalle figure geometriche più familiari ai ragazzi (come i diversi tipi di quadrilateri) per poi andare ad analizzare – sempre dal punto di vista della simmetria – qualche figura più complicata; il terzo (scheda C) propone un'attività con la piegatura della carta, con l'obiettivo di far scoprire ai ragazzi come queste due situazioni apparentemente diverse e lontane fra loro – gli specchi e la piegatura della carta – abbiano in realtà lo stesso schema matematico sottostante.



## SIMMETRIA: DAGLI SPECCHI ALLA CARTA

Nel seguito di questo fascicolo si trovano le schede proposte ai ragazzi corredate di commenti per gli insegnanti (in azzurro).

### IL GIOCO DELLA TOMBOLA

Questa attività è di tipo ludico: consiste nel gioco della tombola basato sul tipo di simmetria di una figura (quanti sono gli assi di riflessione di una figura e quante sono le rotazioni che mandano una figura in se stessa). Noi suggeriamo di proporre questo gioco dopo lo svolgimento del laboratorio. Il gioco infatti può essere un'occasione per testare quanto i ragazzi hanno assimilato circa il tipo di simmetria di una figura. Ogni cartella della tombola comprende diverse figure, organizzate in tre categorie (poligoni piani; figure geometriche più articolate; cartelli stradali o altri simboli di uso comune).

Suggeriamo di condurre l'attività nel modo seguente. Si inizia a suddividere la classe in gruppi di 4 o 5 studenti al massimo e di distribuisce a ciascun gruppo sia una cartella plastificata della tombola, sia la stessa cartella stampata da CD-rom (va bene in bianco e nero). Prima di iniziare il gioco vero e proprio i ragazzi devono riconoscere il tipo di simmetria di ogni figura presente sulla propria cartella, aiutandosi anche con gli specchietti in dotazione nel *kit*. A questo scopo possono utilizzare e "pasticciare" la cartella in bianco e nero, segnando il tipo di simmetria di ciascuna figura. Solo in un secondo momento l'insegnante potrà dare avvio alla tombola, estraendo un cartellino alla volta. I cartellini che vengono estratti possono contenere diciture del tipo "rotazione di 60 gradi" o "due assi di simmetria": nel primo caso si potrà mettere il fagiolo su una qualsiasi figura che resti invariata con una rotazione di 60 gradi; nel secondo caso su una qualsiasi figura che abbia **almeno** due assi di simmetria.

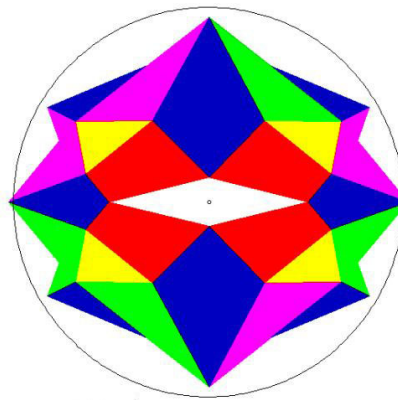
Vale la pena fare esplicitamente alcune osservazioni:

1. è possibile (come accade nella tombola "normale") che con una certa estrazione un gruppo di ragazzi non possa sistemare alcun fagiolo; è possibile anche (e questo invece nella tombola "normale" non accade) che con una certa estrazione un gruppo di ragazzi possa sistemare il fagiolo in più caselle: in questo caso il gruppo dovrà decidere quale scelta gli è più conveniente. Questa ambiguità è voluta, perché la discussione relativa a questa decisione da prendere può essere un buon elemento per affinare la consapevolezza dei ragazzi sul tema della simmetria (vogliamo in sostanza che i ragazzi si rendano conto – magari attraverso qualche errore commesso nelle prime partite giocate – che, in presenza di un'ambiguità di questo tipo, sarà per loro più conveniente mettere il fagiolo sulla figura che ha **meno** simmetria possibile...);
2. alcune regole possono essere modificate rispetto a quanto qui si indica: ad esempio, all'estrazione del cartellino "due assi di simmetria", abbiamo detto che si potrà mettere il fagiolo su una qualsiasi figura che abbia **almeno** due assi di simmetria. Un'altra scelta possibile è quella di richiedere che a tale



estrazione si metta il fagiolo su una qualsiasi figura che abbia **esattamente** due assi di simmetria. Entrambe le scelte hanno senso e ci sembra utile che i ragazzi (magari in un secondo momento) le discutano, si rendano conto della differenza fra le due opzioni e decidano da sé con quale vogliono giocare;

3. altre regole possono essere introdotte rispetto a situazioni ambigue; ad esempio ci sono immagini (come la figura 1787 qui a fianco) che permettono due approcci diversi: possiamo decidere di tenere conto solo della geometria della figura e ignorare il colore (e, in tal caso, la figura avrà due assi di simmetria, e un centro di rotazione); oppure possiamo ammettere fra le simmetrie della figura solo quelle trasformazioni che mandano la figura in sé rispettando anche i colori (e, in tal caso, la figura non ha alcuna simmetria a parte l'identità). Entrambe le scelte sono legittime, e riteniamo quindi che sia utile aspettare che il problema venga sollevato dai ragazzi e che siano loro a confrontarsi su questa decisione. Ciò può diventare un ulteriore momento significativo di riflessione.



Non tutte le schede sono di pari difficoltà. Alcune figure possono generare qualche perplessità a seconda di come sono raffigurate. Ad esempio è più difficile per i ragazzi riconoscere la simmetria del quadrato (4 assi di simmetria e 4 rotazioni che lo lasciano invariato) quando esso è disegnato con i lati non paralleli ai bordi della casella.

Nonostante tutte le nostre avvertenze, la tombola è un gioco, quindi è bene che i ragazzi si “lascino andare”: così facendo, le regole appariranno meno complicate!

Nel CD-rom si trova un file contenente tutte le figure utilizzate con l'indicazione della simmetria di ciascuna.



### I POSSIBILI PERCORSI E TEMPI

Le tre schede sono del tutto indipendenti l'una dall'altra, quindi l'insegnante potrà decidere eventualmente di proporle solo alcune, scegliendo liberamente quelle che sono più congeniali alla classe. In linea di massima si può prevedere 1 o 2 ore per la prima scheda, un paio d'ore per la seconda e almeno un'ora per la terza.

Occorre tenere presente, però, che questi tempi sono solo indicativi e dipendono fortemente dal peso che l'insegnante stesso decide di voler dare a queste attività.

Ad esempio, l'attività della scheda A può essere tagliata e ridotta a cercare semplicemente un paio di esempi; o può essere ampliata come suggerito nei commenti alla scheda, occupando di conseguenza molto più tempo.

I *file* con le schede di laboratorio sono gli stessi per ciascuna classe (dalla prima alla terza). Naturalmente alle stesse richieste faranno riscontro risposte diverse e si accetteranno livelli di approfondimento diversi, a seconda dell'età dei ragazzi (si vedano i commenti alle singole attività delle schede).

### I METODI

La modalità con cui proponiamo che vengano svolte le diverse attività è quella “laboratoriale”. Allo stesso spirito si richiama anche il gioco della tombola (le cartelle per la tombola sono infatti volutamente poche, proprio allo scopo di promuovere anche in questo caso la collaborazione fra gli studenti).

La modalità di laboratorio che prevediamo per l'attività collegata alle schede A, B e C è strutturata nel modo seguente:

- suddivisione in piccoli gruppi di lavoro; l'insegnante tenga presente che il materiale fornito nel *kit* è sufficiente per al più 5 gruppi di lavoro (fa eccezione l'attività della tombola che richiede gruppi di lavoro più piccoli e per la quale è previsto materiale per 6 gruppi) e che in generale i gruppi ottimali sono di 4-5 ragazzi;
- utilizzo di materiale manipolabile;
- svolgimento delle attività proposte nella scheda di lavoro;
- scrittura delle risposte negli appositi spazi sulla scheda di lavoro.

Riteniamo sia molto utile dedicare un po' di tempo, al termine del laboratorio, alla presentazione orale, da parte di ciascun gruppo, del proprio lavoro alle altre squadre e a una eventuale libera discussione tra i gruppi.

Questa modalità “laboratoriale” è finalizzata al raggiungimento di alcuni obiettivi, tipici del fare ricerca in matematica, che possiamo così riassumere:

- costruzione del proprio sapere;
- comunicazione delle proprie scoperte;
- interiorizzazione delle nozioni apprese.



Dalla collaborazione tra componenti del gruppo, dai liberi tentativi di risposta e con la guida delle schede di lavoro, i ragazzi giungono autonomamente ad acquisire alcune conoscenze di base.

È importante che gli studenti scrivano le risposte a cui sono giunti, anche se sbagliate. È molto meglio partire da qualcosa di sbagliato ma che è scaturito dai ragionamenti dei ragazzi piuttosto che mettere loro in testa le nostre risposte (se le dimenticherebbero a breve!). Inoltre è proprio nel momento in cui si rielaborano le conoscenze per comunicarle per iscritto che queste vengono interiorizzate e comprese a fondo. Infine, il fatto di riportare le risposte sulla scheda consente di tenere traccia del lavoro svolto, che può eventualmente essere ripreso successivamente in classe.

Altrettanto importante è che i ragazzi acquisiscano o affinino la capacità di descrivere la realtà e, in un certo senso, di “raccontare la matematica”: questa abilità è un passaggio fondamentale dell’apprendimento, successivo alla fase di osservazione, e che NON ne è automatica conseguenza. In generale, l’aver capito i concetti, le proprietà, le “regole del gioco” non si traduce automaticamente in una facilità nel descrivere tutto ciò ai compagni: per raggiungere questo obiettivo occorre insistere con attività che siano a ciò esplicitamente finalizzate.

In particolare ciò vale in campo matematico, dove l’aspetto della descrizione e del linguaggio diventa cruciale.

Durante lo svolgimento del laboratorio l’insegnante ha il compito di sorvegliare le attività dei vari gruppi, garantendo una generale situazione di equilibrio. Può certamente sciogliere dubbi o fornire chiarimenti “sulle regole del gioco”, sottolineare i problemi che scaturiscono dai ragionamenti e magari porre domande-stimolo suscitate proprio dai dibattiti in corso all’interno del gruppo, ma è bene che non dia risposte o suggerimenti, in modo che gli studenti giungano autonomamente alle soluzioni. La scheda svolge la funzione di filo conduttore del laboratorio: non è necessario che venga seguita pedissequamente. È importante lasciare ai gruppi il tempo di svolgere le attività richieste, ma non importa se non tutti i gruppi riescono a terminare l’attività nel tempo stabilito; importa invece che affrontino i quesiti scontrandosi con le problematiche proprie del laboratorio e cominciando a ragionare sui metodi da adottare per superarle. Non è tanto importante che i ragazzi completino l’intera scheda, se per farlo prestano più attenzione alla velocità che non alla qualità del lavoro svolto. Infatti, scopo del laboratorio è che i ragazzi acquisiscano, in maniera durevole nel tempo, competenze disciplinari sul tema della simmetria e tale obiettivo si raggiunge più facilmente quando essi vengono coinvolti direttamente nella gestione del lavoro.

Alla fine delle attività può essere utile, come già accennato, un momento di discussione in grande gruppo in cui i ragazzi possano esporre agli altri gruppi le conclusioni a cui sono giunti. In questa fase l’insegnante può tirare le fila del discorso utilizzando ulteriore materiale a disposizione sia sul CD-rom sia nel sito

<http://www.matematita.it/materiale>.

L’insegnante, se pensa che possa essere utile, propone ai ragazzi, secondo le modalità che ritiene opportune (risposta individuale/collettiva; con intervallo più o meno lungo fra le attività proposte e questo momento di riflessione; con più o meno tempo



## SIMMETRIA: DAGLI SPECCHI ALLA CARTA

a disposizione, ...), di rispondere ad alcune domande. Ne proponiamo qui un paio, una che si riferisce ai contenuti e una ai metodi di svolgimento delle attività del *kit*:

- qual è il concetto o il risultato che ti è parso più importante fra ciò che hai imparato con le attività del *kit*?
- che cosa hai apprezzato di più, e che cosa di meno, del metodo di lavoro?

Infine, insieme al *kit* vi viene consegnato un questionario per gli insegnanti. Vi saremmo grati se voleste dedicare qualche minuto alla sua compilazione e poi ce lo restituiste insieme al *kit*, perché ogni vostro commento sarà prezioso per migliorare la nostra proposta.





## SCHEDA A – GIOCARE CON L'ALFABETO

Avete a disposizione uno specchio. Provate a utilizzarlo per “classificare” le lettere dell’alfabeto rispetto alla loro simmetria.

- Ci sono alcune lettere che hanno un ASSE DI SIMMETRIA verticale oppure uno orizzontale (o entrambi). Ciò significa che è possibile appoggiare uno specchio alla lettera in modo che la “mezza lettera”, insieme all’immagine riflessa, ricostruisca l’intera lettera.

	A	E	N
Asse Verticale			
Asse Orizzontale			

La **A** ha un asse di simmetria verticale, la **E** e la **N** non ce l’hanno.

La **E** ha un asse di simmetria orizzontale, la **A** e la **N** no.

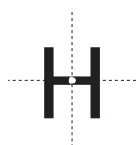
*Abbiamo usato qui la terminologia “verticale” e “orizzontale” a intendere rispettivamente perpendicolare e parallelo alla direzione di scrittura. Vale la pena osservare esplicitamente che le parole “verticale” e “orizzontale” sottintendono la presenza di un sistema di riferimento.*

- Altre lettere ancora hanno due assi di simmetria:

**H**

Quali sono gli assi di simmetria di questa H? Disegnateli nella figura.

Le lettere, come la **H**, che hanno due assi di simmetria hanno anche un CENTRO DI SIMMETRIA: potete immaginare di fissare al tavolo con una puntina la sagoma della lettera, utilizzando la posizione indicata in figura qui sotto. Ruotando la sagoma di 180°, la lettera rimane inalterata.





## SIMMETRIA: DAGLI SPECCHI ALLA CARTA

- Altre ancora non hanno assi di simmetria, ma hanno un centro di simmetria:

S

- Altre ancora sono completamente asimmetriche, ovvero non hanno né assi né centro di simmetria:

G

Provate a riempire la tabella qui sotto mettendo al loro posto tutte le lettere dell'alfabeto; se, dopo aver considerato tutto l'alfabeto, non vi siete ancora stufati di questo gioco, potete "incassettare" in modo analogo le cifre che usate per scrivere i numeri, oppure le lettere di alfabeti diversi dal nostro (magari avete in classe qualche compagno che ne conosce qualcuno...) oppure i simboli che trovate in un programma di videoscrittura, per esempio  $\otimes$ ,  $\cap$ ,  $\subset$ ,  $\subseteq$ ,  $\Leftrightarrow$ ,  $\geq$ ,  $\pm$ , ...)

*Date a ciascun gruppo uno dei sei specchi a disposizione nel kit.*

*Il kit comprende anche alcune schedine con lettere, numeri e simboli. Lasciamo all'insegnante il compito di decidere in che modo utilizzarli in questa attività.*

*Il problema più delicato può essere quello di decidere se c'è o meno un centro di simmetria di ordine 2, ovvero un punto tale che la rotazione di  $180^\circ$  intorno a quel punto lascia la lettera inalterata. Si può per esempio dire a due ragazzi di disporsi ai lati opposti di un tavolo e mettere sul tavolo un foglio con la lettera in discussione: se i due ragazzi la vedono allo stesso modo, allora questo significa che una rotazione di  $180^\circ$  lascia la lettera invariata. Questa non è altro che una maniera diversa di dire la stessa cosa, ma per alcuni ragazzi può essere illuminante.*

Asse di simmetria orizzontale	E	B	C	D	K	3											
Asse di simmetria verticale	A	M	T	U	V	W	Y										
Due assi e un centro di simmetria	H	I	O	X	8	0											
Nessun asse e un centro di simmetria	S	N	Z														
Né centro né assi di simmetria	G	F	J	L	P	Q	R	1	2	4	5	6	7	9			

E se pensate non più solo a una lettera, ma a una intera parola?

Se immaginate di scriverla su una mattonella e di accostarla ad uno specchio, in

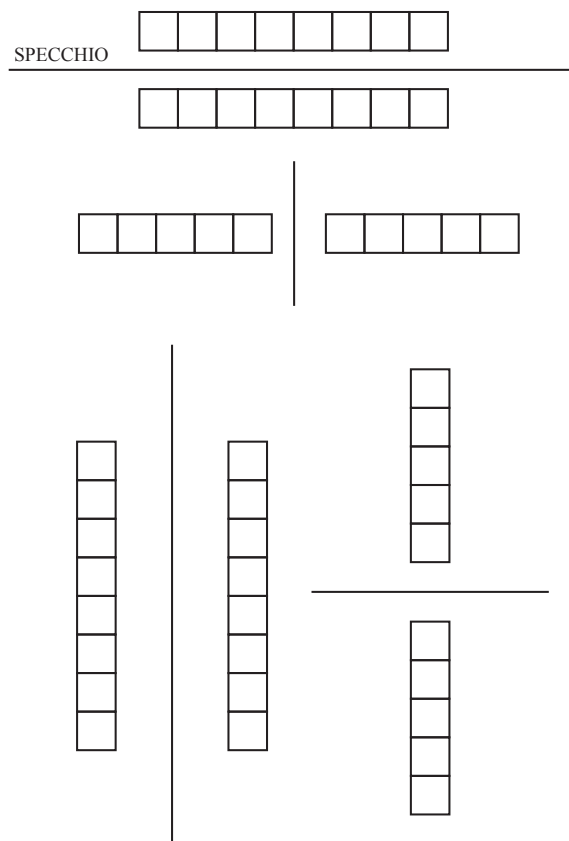




generale non leggete la stessa parola nell'immagine riflessa, anzi, non capite proprio nulla. Eppure a volte riuscite a leggere simultaneamente la stessa parola sia sulla mattonella che accostate allo specchio, sia nella sua immagine riflessa. Naturalmente ciò dipende anche da come disponete lo specchio rispetto alla parola.

Provate a scrivere una parola nelle caselle qui sotto, mettendo una sola lettera per ogni casella, in modo che si possa leggere anche allo specchio (**attenzione: non siete obbligati a riempire tutte le caselle!**).

Un suggerimento: un primo passo sarà quello di capire quali lettere si possono utilizzare: ad esempio, come avete visto in figura, potete usare la lettera A con uno specchio verticale ma non con uno specchio orizzontale e viceversa nel caso della lettera E.



Se giocare con le parole vi diverte, potete provare a cercare altri esempi di parole che si leggono allo specchio.

*Sugeriamo per questi giochi di alfabeto di assecondare gli interessi e le curiosità dei ragazzi: a volte si possono davvero appassionare e in tal caso vale la pena soffermarsi con calma, magari con la collaborazione dell'insegnante di italiano. È anche possibile però che alcune classi non entrino particolarmente in risonanza con questo tipo di attività, e in tal caso non ha proprio senso insistere.*

Esempi di parole che si leggono nella prima posizione:



## SIMMETRIA: DAGLI SPECCHI ALLA CARTA

### **CODICE      CEDO      CODE...**

Esempi di parole che si leggono nella seconda posizione:

**AMA              IVI              TOT...**

Esempi di parole che si leggono nella terza posizione:

**AUTO              AUTOMA              MUTAVI              ...**

Esempi di parole che si leggono nella quarta posizione:

**BOB    ...**

*Se i ragazzi hanno provato a cercare altri esempi, si saranno sicuramente accorti che è assai più difficile trovare esempi che si leggano allo specchio nella seconda e nella quarta posizione di quanto non lo sia nella prima o nella terza.*

*In effetti per la prima (rispettivamente terza) posizione è sufficiente fabbricare una parola le cui lettere abbiano tutte un asse di simmetria orizzontale (risp. verticale) e quindi scegliendo le lettere dalla prima (risp. seconda) oppure dalla terza riga nella tabella precedente. Invece, se il problema è quello di costruire una parola che si legga allo specchio nella seconda (risp. quarta) posizione, occorre non soltanto che ciascuna lettera abbia un asse di simmetria verticale (risp. orizzontale), ma anche che la parola sia un palindromo.*

*Un bel problema a questo punto, mirante ad avviare i ragazzi all'astrazione, è proprio quello di chiedere loro, dopo che hanno dato qualche esempio, di individuare queste condizioni, ovvero di fissare le "regole" con cui riconoscere se una parola si legge allo specchio nella prima (o nella seconda, o nella terza, o nella quarta) posizione.*

*Un altro problema che si può porre (sempre soltanto nel caso in cui i ragazzi si siano appassionati al gioco) è quello di dare esempi di parole che, poste di fronte allo specchio come nella seconda posizione (oppure come nella quarta), diano luogo ad altre parole, diverse ma sempre di senso compiuto. Ad esempio OTTAVO, nella seconda posizione, si leggerebbe OVATTO e DE nella quarta posizione, si leggerebbe ED (non è così facile trovare esempi...: per facilitare le cose si possono ammettere parole in altre lingue e coinvolgere l'insegnante di lingua...).*

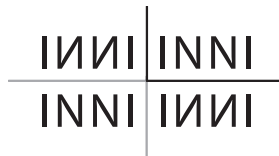
*Un'altra possibilità ancora è quella di usare due specchi, che formino un angolo retto; disponendo una parola fra gli specchi, la si vede quattro volte (una reale e tre virtuali) e si possono usare le parole già trovate per decidere quali si leggono in quali posizioni. La parola CECI si legge anche riflessa nello specchio orizzontale, mentre la parola AMA si legge anche nello specchio verticale.*



*Può succedere anche, come con la parola INNI (4045) nella figura seguente, che la parola non si legga allo specchio (né con lo specchio in posizione orizzontale né in*



quella verticale), ma si legga nel quarto dei 4 quadranti individuati dai due specchi. La figura in questo quadrante si ottiene da quella iniziale per composizione delle due riflessioni (cioè per una rotazione di 180°).



Secondo voi le risposte a queste domande dipendono dal carattere di stampa che viene utilizzato? .....

Se non sapete che cosa rispondere, provate a confrontare queste lettere “A”:



Cerchiate quella o quelle che ha o hanno un asse di simmetria.

*Ci aspettiamo che i ragazzi si siano accorti che la simmetria delle lettere dipende dal carattere di stampa utilizzato: la terza “A” è l’unica ad avere un asse di simmetria verticale, mentre le altre non l’hanno.*

*Si può anche “forzare un po’ la mano” ovvero giocare a deformare la scrittura normale in modo che la parola resti uguale quando viene capovolta (come Venezia nell’esempio qui sotto), oppure quando viene letta a uno specchio, nelle diverse possibili posizioni (la seconda posizione per Ragusa qui sotto). Ma si può anche fare in modo che la parola letta allo specchio dia luogo ad una parola differente, ma sempre di senso compiuto (nell’esempio che segue disponendo uno specchio, come nella prima posizione, sotto la parola Trentino si legge ... Alto Adige).*

Provate a riconoscere che cosa c’è scritto in queste parole “simmetriche” e a dire quale tipo di simmetria possiede ciascuna parola:



**VENEZIA;** rotazione di 180°



**RAGUSA;** riflessione di asse verticale



**TRENTINO ALTO ADIGE;**  
riflessione di asse orizzontale

*Gli esempi qui sopra sono tratti dal libro “Ambigrammi” di D. Hofstadter (ed. Hopful Monster, 1987), dove potrete trovarne molti altri.*



## SIMMETRIA: DAGLI SPECCHI ALLA CARTA

### SCHEDE B – COSTRUZIONI ALLO SPECCHIO

1. Conoscete tanti diversi tipi di quadrilateri (parallelogrammo, trapezio, rombo, rettangolo, quadrato...): sapreste distinguerli a seconda di come si riescono a ricostruire con gli specchi?

Provate a riempire la tabella alla pagina seguente.

Come prima cosa naturalmente dovrete chiedervi che cosa significa “ricostruire un quadrilatero con gli specchi”. Ad esempio, come potete ricostruire un rombo con uno specchio? (attenti, se partite dalla forma intera lo specchio non vi serve a nulla...! La prima riga della tabella, che abbiamo completato noi, può darvi qualche suggerimento).



## SIMMETRIA: DAGLI SPECCHI ALLA CARTA



Quadrilateri		uno specchio	per esempio come?	due specchi a 90°	per esempio come?	due specchi a 45°	per esempio come?
Rettangolo		Si		Si		No	
Quadrato		Si		Si		Si	
Rombo		Si		Si		No	
Parallelogrammo		No		No		No	
Trapezio isoscele		Si		Si		No	
Trapezio		No		No		No	
Aquilone		Si		Si		No	
Freccia		Si		Si		No	
Quadrilatero generico		No		No		No	



## SIMMETRIA: DAGLI SPECCHI ALLA CARTA

*Ogni gruppo ha a disposizione uno specchietto, un set di 9 schedine con i diversi tipi di quadrilateri e un set di forme di gomma crepla da testare fra gli specchi.*

*Questa analisi mira a rendere i ragazzi consapevoli del fatto che le distinzioni che essi conoscono fra i quadrilateri (corrispondenti anche ai nomi che vengono usati) sono in gran parte legate alla simmetria della figura.*

*Il quadrato è l'unico tipo di quadrilatero che ha 4 assi di simmetria, che formano angoli di  $45^\circ$ : si può quindi ricostruire fra due specchi a  $45^\circ$ , inserendo un triangolo rettangolo isoscele. Si può ricostruire anche fra due specchi ortogonali fra loro, e questo si può fare in due modi diversi, sia inserendo un quadrato, sia inserendo un triangolo rettangolo isoscele. E, naturalmente, si può anche ricostruire con un solo specchio, utilizzando un rettangolo (con un lato doppio dell'altro) oppure un triangolo rettangolo isoscele.*

*Rombi e rettangoli hanno due assi di simmetria, fra loro ortogonali. Si possono ricostruire quindi fra due specchi ortogonali; per ottenere un rombo basta inserire un triangolo rettangolo, per ottenere un rettangolo basta inserire un rettangolo (simile a quello che si vuole ottenere).*

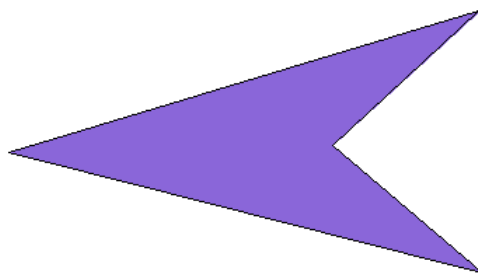
*Tutte le forme che si ottengono con due specchi si possono naturalmente ottenere anche con un solo specchio.*

*Oltre a queste forme, altre forme che si ricostruiscono con uno specchio (ovvero, che hanno un asse di simmetria) sono il trapezio isoscele, l'aquilone (ovvero un quadrilatero che ha le diagonali perpendicolari fra loro, non necessariamente uguali fra loro, e tali che il loro punto di intersezione è punto medio di almeno una delle due) e la freccia che pure, come si vede in figura, ha le diagonali perpendicolari fra loro (se vogliamo chiamare "diagonale" anche il segmento che unisce due vertici e che non è contenuto all'interno del poligono, che è un poligono concavo).*

*Invece trapezi non isosceli, parallelogrammi e altri quadrilateri che non rientrino in nessuna delle categorie precedenti non si possono ricostruire con uno specchio.*

*Ci aspettiamo che sia il parallelogrammo la figura che genera maggiori difficoltà, proprio per il fatto che la figura (giustamente!) appare "simmetrica". In effetti il parallelogrammo ha una simmetria (ovvero: esiste una isometria diversa dall'identità che manda la figura in se stessa), solo che questa non è una riflessione (e quindi non corrisponde a uno specchio), ma è una rotazione di  $180^\circ$ .*

*I ragazzi che non ne sono convinti dovranno provare ad appoggiare uno specchio al disegno di un parallelogrammo, in corrispondenza per esempio di una diagonale (o in qualsiasi altra posizione), in modo da convincersi di questo fatto.*



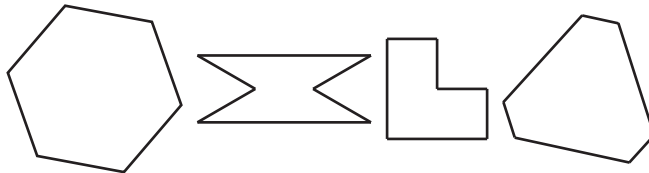
Ci sono, secondo voi, dei casi in cui lo stesso poligono si riesce a ottenere fra gli specchi in due maniere diverse (per esempio utilizzando forme diverse)?



*Per ottenere il quadrato fra due specchi ortogonali (o anche con un solo specchio) si possono usare due mattonelle diverse (quadrato o triangolo rettangolo isoscele nel caso dei due specchi ortogonali; rettangolo con i lati in rapporto 1:2 o triangolo rettangolo isoscele nel caso dello specchio singolo).*

*Per ottenere lo stesso rettangolo con uno specchio si possono appoggiare allo specchio due diversi rettangoli, fra loro non simili; una situazione analoga si ha per i rombi.*

Se avete voglia di scervellarvi ancora un po', provate a vedere che cosa succede con questi altri poligoni che non sono più quadrilateri, ma esagoni:



Li potete ricostruire con uno specchio? Anche con due specchi? (...)

Provate a segnare la posizione dello specchio in figura.

Come deve essere l'angolo fra i due specchi? (...)

*L'esagono regolare ha sei assi di simmetria, e si può ricostruire tra due specchi a  $30^\circ$ , inserendo un triangolo rettangolo di angoli  $30^\circ$  e  $60^\circ$ .*

*Il secondo esagono da sinistra in figura ha due assi di simmetria fra loro ortogonali e si ricostruisce inserendo un trapezio rettangolo fra due specchi a  $90^\circ$ .*

*Il terzo esagono da sinistra ha un asse di simmetria e si ricostruisce appoggiando a uno specchio il lato obliquo di un trapezio rettangolo, che abbia questo lato obliquo inclinato di  $45^\circ$  rispetto alla base.*

*L'ultimo esagono sulla destra ha tre assi di simmetria, che formano angoli di  $60^\circ$ .*

- Guardate le figure disegnate nella prima colonna della tabella. Analizzatele per decidere, per ciascuna di esse, quante e quali sono le trasformazioni che mandano il disegno in se stesso: si può trattare di rotazioni (e dovrete specificare di quale angolo e intorno a quale punto) oppure di riflessioni, se la figura ha un asse di simmetria (e dovrete in questo caso specificare la posizione di questo asse).

Per decidere se una figura ha un asse di simmetria, potete utilizzare uno specchio: il fatto che la figura abbia un asse di simmetria significa che, disponendo lo specchio sulla figura in corrispondenza di quest'asse, la mezza figura, insieme all'immagine riflessa, ricostruisce la figura intera.

*Per questa attività ogni gruppo avrà a disposizione lo specchio singolo e i due specchi incidenti.*


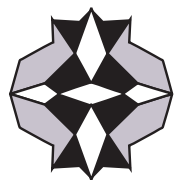



*Lasciamo al docente il compito di decidere quanto insistere con questo problema, se limitarsi alle figure che abbiamo qui indicato o se proseguire con altre immagini che i ragazzi hanno a disposizione, ad esempio quelle presenti nel CD-rom o fra le*



## SIMMETRIA: DAGLI SPECCHI ALLA CARTA

*schede plastificate.*

In questa tabella, vi abbiamo dato l'esempio di cosa potete fare, riempiendo le prime due righe; provate ad analizzare in modo analogo le altre figure che avete a disposizione.

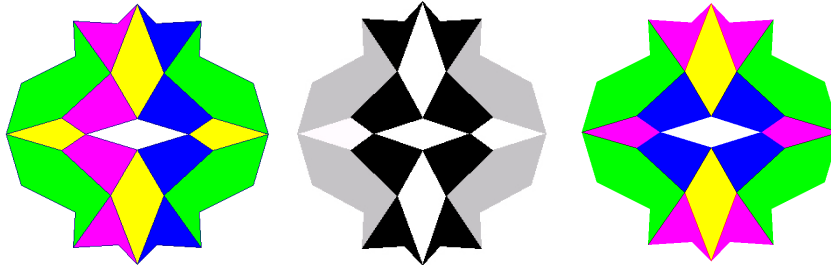
<b>Figura</b>	<b>Rotazioni</b>	<b>Assi di simmetria</b>
	Tre rotazioni: una di $120^\circ$ , una di $240^\circ$ , una di $360^\circ$	Non ci sono assi di simmetria
	Due rotazioni: una di $180^\circ$ e una di $360^\circ$	Due assi di simmetria
	<i>Sei rotazioni: una di <math>60^\circ</math>, una di <math>120^\circ</math>, una di <math>180^\circ</math>, una di <math>240^\circ</math>, una di <math>300^\circ</math> e una di <math>360^\circ</math></i>	<i>Sei assi di simmetria</i>
	<i>Sei rotazioni: una di <math>60^\circ</math>, una di <math>120^\circ</math>, una di <math>180^\circ</math>, una di <math>240^\circ</math>, una di <math>300^\circ</math> e una di <math>360^\circ</math></i>	<i>Non ci sono assi di simmetria</i>
	<i>Cinque rotazioni: una di <math>72^\circ</math>, una di <math>144^\circ</math>, una di <math>216^\circ</math>, una di <math>288^\circ</math> e una di <math>360^\circ</math></i>	<i>Cinque assi di simmetria</i>

Alcune delle figure che avete qui analizzato sono le stesse che avete a disposizione fra le schede plastificate, solo che qui sono in bianco e nero, mentre le schede sono anche a colori.

Secondo voi può cambiare qualcosa in questa analisi tra la figura a colori e quella in bianco e nero? Che cosa? (...)

*Non è detto che l'analisi sia la stessa nei due casi.*

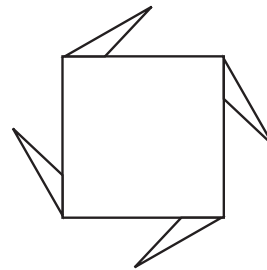




*Ad esempio, fra le tre immagini qui sopra, quella in bianco e nero al centro ha due assi di simmetria, come anche la figura sulla destra; invece quella sulla sinistra ha un solo asse di simmetria (la riflessione in un asse verticale manda la figura in sè, ma scambia il rosa col blu).*

3. Ci sono 4 rotazioni che fissano un quadrato (una è quella di  $360^\circ$ , cioè l'identità: quali sono le altre?) e 4 riflessioni (quali?).

Che cosa succede se aggiungiamo al quadrato quattro triangolini come nella figura qui a destra? Le 4 rotazioni che fissano il quadrato fissano anche questa nuova figura? (...)



I 4 assi di simmetria del quadrato sono assi di simmetria anche per questa nuova figura? (...)

*La simmetria di questa figura comprende quattro rotazioni (di  $90^\circ$  e multipli) ma nessuna riflessione, ovvero gli assi di simmetria del quadrato non sono più assi di simmetria per questa figura.*

4. Disegnate due figure diverse che rispetto alla simmetria si comportino come il quadrato (4 assi di simmetria e 4 rotazioni che le lasciano invariate), e due figure diverse che rispetto alla simmetria si comportino come la “girandola” qui sopra (4 rotazioni che le lasciano invariate e nessun asse di simmetria).

È possibile secondo voi disegnare una figura che abbia 4 assi di simmetria e però sia tale che nessuna rotazione la lasci invariata? Perché? (...)

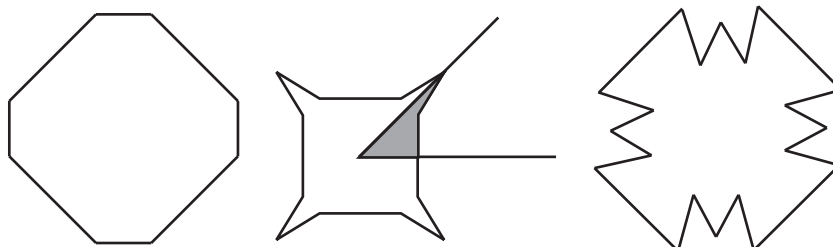
*Nella pagina seguente potete vedere alcuni esempi di figure con la stessa simmetria del quadrato (le tre figure della prima riga in alto) ovvero con la stessa simmetria di una girandola (4 rotazioni, ma nessun asse di simmetria, per le tre figure nella seconda riga).*

*Una maniera per costruire quanti esempi si vogliono del primo tipo è quella di fissare due rette che formino un angolo di  $45^\circ$  e una forma arbitraria fra queste due rette (come si mette in evidenza nella figura al centro): considerando le successive riflessioni di questa forma si ottiene una figura che ha (almeno) quattro assi di simmetria di un quadrato. Ciò equivale proprio a porre una forma fra due specchi a  $45^\circ$*

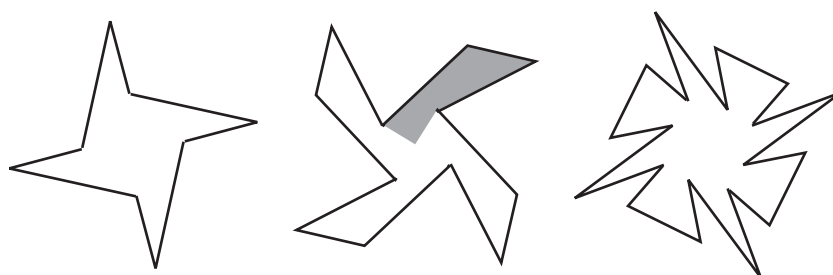


## SIMMETRIA: DAGLI SPECCHI ALLA CARTA

e osservare la figura che si ottiene: quindi due specchi a  $45^\circ$  sono una “macchina” che fabbrica la simmetria di un quadrato.



Analogamente, per fabbricare esempi del secondo tipo, con la simmetria di una girandola, basta fissare un punto e una forma qualsiasi (come si mette in evidenza in grigio nella figura al centro) e ruotare questa forma di  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  rispetto al punto prefissato. La figura ottenuta unendo queste 4 forme ha la stessa simmetria di una girandola.



Non è possibile invece che una figura abbia assi di simmetria e nessuna rotazione che la lasci invariata: innanzitutto perché c'è sempre quanto meno la rotazione di  $360^\circ$  che lascia invariata qualunque figura. Inoltre si può osservare che, non appena ci sono almeno due riflessioni che fissano una figura, allora la figura viene lasciata invariata anche operando le due riflessioni una dopo l'altra: ma la trasformazione che si ottiene operando due riflessioni, una dopo l'altra, rispetto a due rette incidenti, è una rotazione, di centro il punto di incidenza fra i due assi di riflessione e di angolo doppio dell'angolo compreso fra le due rette. Quindi troviamo anche una seconda rotazione (diversa dall'identità) che fissa la figura.

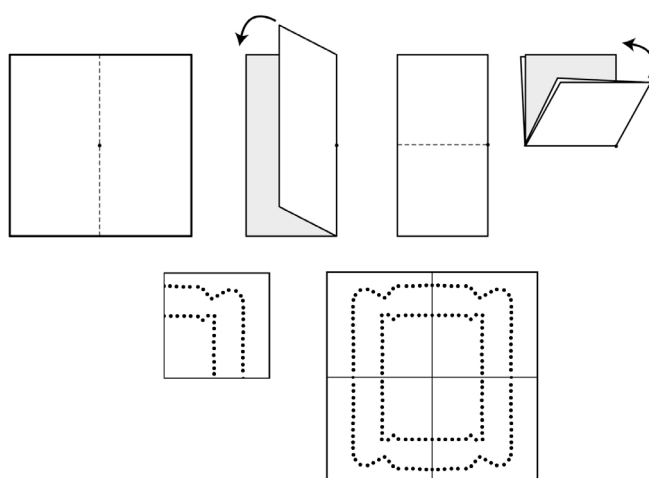
Naturalmente quest'ultima domanda è assai più difficile delle precedenti e non c'è certo da aspettarsi che i ragazzi rispondano in maniera esaustiva e corretta.

Tuttavia, riteniamo che sia comunque utile abituarli a cercare una motivazione, il più possibile argomentata, delle loro affermazioni.



## SCHEDA C – PIEGATURA DELLA CARTA

1. Con due pieghe ortogonali fra loro piegate un foglio in quattro e con uno spillo “bucherellate” una certa figura F; riaprendo il foglio vedrete, oltre a F, altre tre figure uguali a F: due di queste si ottengono da F per riflessione in una retta (quale?); la terza invece no. Come possiamo descrivere la maniera in cui ottenere la terza figura a partire da F? (...)



*Questa attività ha due obiettivi: da un lato mira a far osservare ai ragazzi, in modo del tutto informale, che cosa succede componendo due riflessioni (nel caso delle rette incidenti in questo primo punto e in quello delle rette parallele nel prossimo); dall'altro si propone di far notare ai ragazzi come lo schema sottostante a due situazioni apparentemente molto diverse (gli specchi e la piegatura della carta) sia lo stesso. Osservazioni di questo genere possono essere preziose per avviare i ragazzi alla potenza dell'astrazione.*

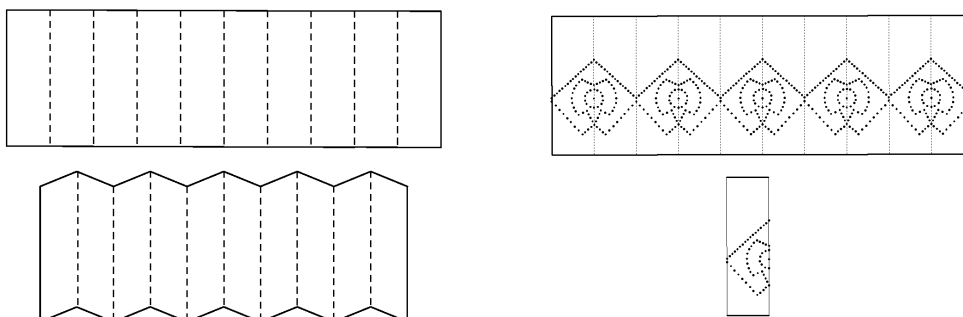
*In questa prima attività i ragazzi possono osservare che due delle quattro figure ottenute differiscono da quella originale per una riflessione, rispettivamente nelle due pieghe che si sono fatte; la terza invece differisce da quella originale per una rotazione di  $180^\circ$  rispetto al punto di intersezione delle due pieghe: e questa rotazione è proprio la composizione delle riflessioni nelle due pieghe.*

*L'osservazione è più evidente se la figura da cui si parte è asimmetrica.*

2. Prendete una striscia di carta e piegatela a fisarmonica, con alcune pieghe parallele fra loro; con uno spillo fate un po' di buchi sul rettangolo ottenuto, tracciando il profilo di una certa figura F; quando riaprite il foglio vedete oltre a F un po' di altre figure, uguali a F (il loro numero dipenderà dal numero di pieghe che avete fatto nella striscia); alcune di queste (quante? quali?) si ottengono da F per una riflessione (in quali rette?); e le altre? (...)



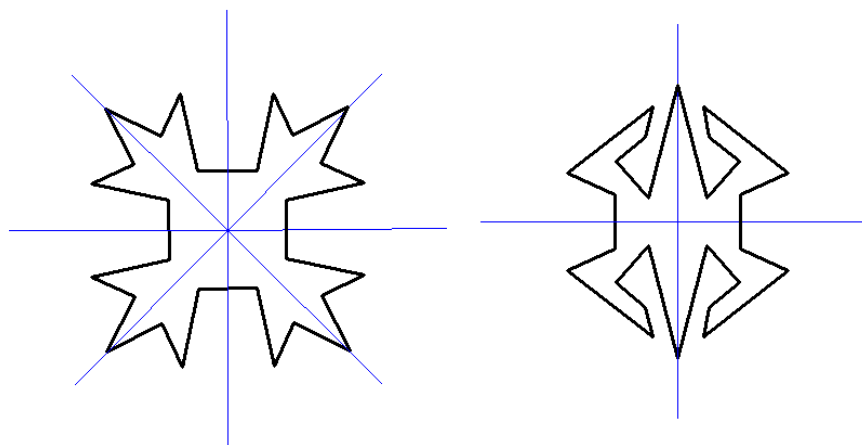
## SIMMETRIA: DAGLI SPECCHI ALLA CARTA



*In quest'altra attività i ragazzi osserveranno che alcune figure (alternate, una sì e una no) differiscono da quella originale per una traslazione, mentre le altre differiscono da quella originale per una riflessione, rispetto a una delle rette rappresentate dalle pieghe. In effetti le due pieghe sono in questo caso parallele e la composizione delle riflessioni in due rette parallele è una traslazione.*

*Naturalmente spetta all'insegnante decidere se lasciare questo fatto a livello puramente osservativo ovvero prendere spunto da questa osservazione per una analisi più sistematica.*

3. Anziché bucherellare, possiamo usare le forbici: sapreste, piegando il foglio e poi tagliando, realizzare le due figure qui di seguito?



*La figura di destra si realizza piegando il foglio in 4 con due successive pieghe a metà; quella di sinistra si realizza piegando il foglio in 8 con tre successive pieghe a metà.*

Secondo voi c'è una qualche relazione fra questa attività che avete fatto con la piegatura della carta e quello che avete visto con gli specchi? (...)

*Come si diceva prima, uno degli obiettivi di questa attività è quella di far sì che i ragazzi si accorgano che il modello sottostante alle due situazioni è lo stesso.*



---

## REFERENZE FOTOGRAFICHE

La fotografia di copertina è di Francesca Civile

La fotografia di pag. 3 è di Piero Fioravanti.

Le fotografie di pagg. 4 e 5 sono di Franco Valoti.