



SCHEDA S

STELLE

L'ARITMETICA DEL PERIODICO

Questo laboratorio ha a che fare con l'aritmetica dei fenomeni che si ripetono periodicamente; alla fine del laboratorio potremo dare un senso a affermazioni del tipo:

$$57 + 32 + 83 = 7$$

oppure

$$1376895 = 0$$

Cominciamo da qualche domanda "di riscaldamento":

- se vado in piscina oggi che è martedì e poi continuo a andare un giorno sì e un giorno no, capita, prima o poi, che ci vada di lunedì?

E di mercoledì?

E di giovedì?

E anche in un qualsiasi altro giorno della settimana?

- Se vado a teatro oggi che è il 12 gennaio e poi continuo a andare un mese sì e un mese no, capita, prima o poi, che ci vada in febbraio?.....

E in ottobre?

E anche in un qualsiasi altro mese dell'anno?

In che senso posso parlare di "mesi pari e mesi dispari", mentre non ha proprio senso parlare di "giorni della settimana pari e giorni della settimana dispari"? Provate a spiegare:

.....

.....

.....

Come mai secondo voi questo comportamento diverso per i giorni e per i mesi?

.....

.....

Che cosa prevedete che succeda se vado in piscina un giorno sì e tre no? E se vado a

UGUALI o DIVERSI
Avvio all'astrazione

teatro un mese sì e sette no? (NON vi chiediamo di fare il conto, fate solo un'ipotesi che più avanti verificheremo).

Andando in piscina un giorno sì e tre no finisco prima o poi per aver nuotato in tutti i giorni della settimana? SÌ NO

Andando a teatro un mese sì e sette no finisco prima o poi per esserci andato in tutti i mesi dell'anno? SÌ NO



Avete a disposizione alcuni geopiani.

Prendete quelli con 7 e con 12 pioli; fissate un filo di lana a un (qualsiasi) piolo e procedete con la regola di andare sempre con passo 2 (congiungete un piolo non con il successivo, ma con il seguente, uno sì e uno no) finché ritornate al punto di partenza. Che figure si sono formate?

.....
.....

Chiamiamo **(7,2)** la figura che avete ottenuto sul geopiano da 7 pioli e **(12,2)** quella che avete ottenuto sul geopiano da 12; d'ora in poi indicheremo figure analoghe, ottenute con passo regolare, con due numeri interi **(n, k)**; il primo numero **n** indica il numero dei punti a partire dai quali si realizza la figura (immaginando sempre questi punti equidistanziati su una circonferenza, come per i pioli dei geopiani); cosa indica invece il secondo numero **k** (che nell'esempio trattato vale **k=2**)?

.....
.....

Che relazione c'è tra queste costruzioni e le prime domande da cui siamo partiti?

.....
.....

Possiamo usare i geopiani per rispondere alla domanda lasciata in sospeso su cui avete fatto una previsione: dovreste costruire le figure **(7,4)** e **(12,8)**. Che cosa ottenete?

.....
.....



Le previsioni che avevate fatto erano corrette?

.....
Può essere che a questo punto siate disposti a scommettere che, qualunque sia il passo, con il geopiano da 7 pioli si ottenga sempre una stella che tocca tutti i vertici, mentre con quello da 12 si ottenga sempre un poligono che ne tocca solo alcuni.

Non è così! Provate a costruire sui due geopiani le figure (7,6) e (12,5). Che cosa ottenete?

.....
.....
Ai pioli dei geopiani potete attaccare un cartellino con un numero; vi suggeriamo di usare nel piolo di partenza due cartellini (uno con lo 0 e uno con il numero corrispondente a quello dei pioli del geopiano), a ricordarvi che dobbiamo immaginare che i numeri “si avvolgano” sui pioli del geopiano proprio come i giorni della settimana, o i mesi dell’anno, “si avvolgono” nel tempo.

Disponeteli in verso orario (**ATTENZIONE!** manterremo questa scelta per tutto il laboratorio, quindi ogni volta che si dovrà procedere lungo un cerchio, andremo sempre in verso orario).

Potremmo andare avanti a segnare i numeri continuando a “avvolgere” una immaginaria linea dei numeri sulla circonferenza che contiene i pioli del geopiano. Se consideriamo il geopiano da 7 pioli, su quale piolo finirà il numero 21?

.....
Il numero 77?

.....
Il numero 778?

.....
E il numero -1? -8? -70?

.....
Che caratteristica hanno tutti i numeri che finiscono sul piolo con l’etichetta 0?

.....
E quelli che finiscono sul piolo 1?

.....
Seguite adesso la successione dei numeri toccati dalla stella (7,2). Se partiamo da 0 incontriamo

0	2	4	6
---	---	---	---

UGUALI o DIVERSI
Avvio all'astrazione

.....
quindi la “regola” per passare da un numero al successivo sembra essere quella di sommare +2. Non abbiamo però il numero 8 a disposizione e, se dobbiamo continuare con questa regola, dobbiamo decidere che

$$6+2=1$$

Secondo voi perché questa scrittura può avere senso? (ricordatevi dei giorni della settimana: se oggi è sabato, che giorno è dopodomani?)

.....
La successione di numeri che ottenute sulla stella (7,2) è :

.....
Se fossimo partiti non da 7 punti in un circolo, ma da infiniti punti su una retta, immaginandoli etichettati con i numeri interi e procedendo di 2 in 2, avremmo ottenuto tutti i numeri pari (quelli che i bambini chiamano la “tabellina del 2”), se fossimo partiti da 0 (o da un altro pari), oppure tutti i numeri dispari se fossimo partiti da 1. Qui invece c'è una bella differenza perché abbiamo ottenuto tutti i “numeri” che avevamo a disposizione.

E con la figura (12,2)?

.....
.....
.....
La prima cosa che avete fatto studiando l'aritmetica è di imparare le operazioni, e anche qui faremo la stessa cosa. La grossa differenza che abbiamo qua rispetto ai numeri “veri” è che ora c'è solo un numero finito di casi e quindi con una tabella possiamo registrare l'effetto di tutte le possibili operazioni. Registrare l'effetto della somma è una cosa molto monotona e noiosa, talmente monotona e noiosa che l'abbiamo fatta noi: avete a disposizione le tabelle che vi illustrano come si comporta la somma nell'aritmetica con solo 7 numeri, con 11, con 12 e con 15.

Vi chiediamo invece di riempire le tabelle analoghe per la moltiplicazione. Ma prima qualche domanda; dove “leggete” nelle tabelle della somma il fatto che:

- 3 giorni dopo sabato è martedì?

-
- 7 mesi dopo ottobre è maggio?
-



- 5 giorni dopo giovedì è martedì?

.....

- 8 mesi dopo giugno è febbraio?

.....

Il nostro scopo è ora realizzare le analoghe tabelle per la moltiplicazione e le figure che potete realizzare sui geopiani vi aiuteranno a completarle. Ad esempio, nella stella (7,2) avete visto che vengono toccati, nell'ordine (a cominciare da $7=0$) i punti

0 2 4 6 1 3 5 0

Da ciò possiamo ricavare la seconda riga di questa tabella che lasciamo a voi il compito di completare:

×	1	2	3	4	5	6	7=0
1							
2	2	4	6	1	3	5	0
3							
4							
5							
6							
7=0							

Il compito è meno gravoso di quel che sembra: avete già le figure (7,4) e (7,6) su cui leggere la quarta e la sesta riga.

Com'è fatta (7,3)?

.....

Dovete fare altri conti o l'avete già a disposizione?

.....

Per osservare qualcosa di interessante occorre confrontare questa tabella con quella che si ottiene con un altro numero, ad esempio il 12.

Abbiamo già le figure (12,2), (12,5), (12,8) quindi possiamo subito riempire la seconda, la quinta e l'ottava riga della tabella. A voi il compito di completarla facendo meno fatica possibile: osservare certe regolarità vi permetterà di risparmiare conti!

UGUALI o DIVERSI
Avvio all'astrazione

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12=0
1												
2	2	4	6	8	10	0	2	4	6	8	10	0
3												
4												
5	5	10	3	8	1	6	11	4	9	2	7	0
6												
7												
8	8	4	0	8	4	0	8	4	0	8	4	0
9												
10												
11												
12=0												

La tabella del 7 e quella del 12 hanno alcune caratteristiche analoghe e altre differenti. Provate a registrare qua le vostre prime osservazioni, poi cercheremo di capire meglio quello che succede esaminando anche altri casi.

Analogie:

.....

.....

.....

.....

Differenze:

.....

.....

.....

.....

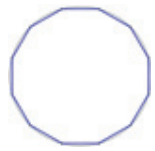

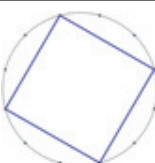


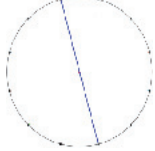

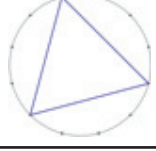
Avete qui di seguito una tabella con tutte le figure regolari (cioè a passo costante) che si possono realizzare sul geopiano da 12 pioli, quelle che abbiamo chiamato **(12,k)**. In alcuni casi, per toccare tutti i vertici del geopiano, serviranno più figure dello stesso tipo: ad esempio **(12,2)** è un esagono che tocca solo 6 dei 12 vertici del geopiano; possiamo in casi di questo genere partire poi da un altro piolo e continuare a procedere a passo 2: si ottiene un altro esagono e i due insieme esauriscono tutti i pioli. Cosa succede con **(12,8)**?





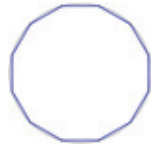
E cosa succede con tutte le altre figure?

Abbiamo riempito noi la tabella del 7, che era più noiosa (fatevela dare dal vostro insegnante); lasciamo a voi da completare quella del 12.

Potete aiutarvi con il geopiano se una particolare riga vi dà qualche difficoltà.

	(12,k)	Quanti vertici tocca la figura?	Quante figure uguali per usare tutti i pioli?
	(12,1)		
	(12,2)		
	(12,3)		
	(12,4)		
	(12,5)		
	(12,6)		
	(12,7)		
	(12,8)		

UGUALI o DIVERSI
Avvio all'astrazione

	(12,9)		
	(12,10)		
	(12,11)		

Siete a questo punto in grado di dire “come va avanti”?

Sappiamo prevedere cosa succede alla riga **k** della tabella con **n** numeri: ci sono gli **n** numeri rimescolati o verranno ripetuti solo alcuni di questi?

.....

E sappiamo prevedere com'è la figura **(n,k)**, anche senza bisogno di costruirla con il corrispondente geopiano?

.....

Se volete fare qualche altro tentativo, avete a disposizione un geopiano da 11 e uno da 15 pioli.

Cominciate a fare un'ipotesi, prima di costruire le figure corrispondenti.

Delle 10 figure ottenute sul geopiano da 11 pioli con passo rispettivamente 1,...,10, quelle in cui il filo torna al punto di partenza senza aver toccato tutti i pioli sono

.....

Delle 14 figure ottenute sul geopiano da 15 pioli con passo rispettivamente 1,...,14, quelle in cui il filo torna al punto di partenza senza aver toccato tutti i pioli sono

.....



.....
Costruite qualche figura e esaminate anche le tabelle dell'11 e del 15 che avete a disposizione: le vostre ipotesi sono state confermate?

.....
Sapreste congetturare una regola generale?

.....
Per rispondere alle prossime due domande, vi suggeriamo di osservare le tabelle che avete appena completato, e in particolare quella relativa al 12 (nell'altra la terza colonna è sempre 7 e la quarta è sempre 1). Fatevi anche dare dal vostro insegnante le altre tabelle relative ai numeri 11 e 15. Riuscite a immaginare una maniera per ricavare il numero della terza colonna o quello della quarta a partire dalla coppia (n,k) di numeri nella seconda colonna?

Si può cominciare a osservare che il loro prodotto vale sempre n (perché?), quindi se sappiamo ottenere l'uno sapremo ottenere anche l'altro dividendo n per il primo. Vi suggeriamo allora di partire dalla quarta colonna: dalle prime righe nella tabella del 12 potrebbe sembrare che il numero che compare è proprio k , ma quando arriviamo alla quinta riga questa ipotesi viene meno. Ne sapete fare un'altra?

.....
.....
.....
Che legame c'è tra il numero di figure uguali di tipo (n,k) necessarie per toccare tutti gli n vertici di un geopiano e i due numeri n e k ?

.....
Che legame c'è tra il numero di lati della figura che si ottiene e i due numeri n e k ?

.....
Quando la figura tocca tutti i vertici del geopiano?

.....
Per quali geopiani tutte le figure regolari toccano tutti i vertici del geopiano (purché il passo non sia 0, oppure uguale al numero dei pioli del geopiano)?

UGUALI o DIVERSI
Avvio all'astrazione

.....
Consideriamo ora la riga corrispondente a **k** nella tabella della moltiplicazione relativa al numero **n**:

Per quali **k** la riga contiene tutti i numeri mescolati?

.....

Per quali **n** tutte le righe della tabella (salvo l'ultima di tutti 0) contengono rimescolati tutti i numeri a disposizione?

.....

Come si esprime in termini di **n** e **k** il numero di volte in cui compare lo 0 fra le **n** caselle della riga?

.....

Come si esprime in termini di **n** e **k** il numero di "multipli di **k**" diversi che compaiono nella riga **k**?

.....

A questo punto potreste anche prevedere come sono queste figure (**n,k**) e cosa succede nella corrispondente **k**-esima riga della tabella con **n** numeri:

(21,9).....

(17,4).....

(24,8).....

Un'ultima domanda; eravamo partiti dicendo che alla fine del laboratorio avremmo potuto dire che hanno senso affermazioni del tipo

$$57 + 32 + 83 = 7$$

oppure

$$1376895 = 0$$

Sapreste indicare un'aritmetica in cui sono vere queste affermazioni?

.....

.....

Sono vere nell'aritmetica di uno dei geopiani che avete a disposizione?

.....

.....



E ORA... RISOLVETE QUESTI!

1. Francesco ha compiuto 17 anni l'8 Febbraio del 2010 (era Lunedì!). In che giorno della settimana è nato? Vi sembra una domanda troppo difficile? Proviamo allora a fare un passo per volta: sapendo che l'8-2-2010 era lunedì, possiamo dire che giorno era l'8-2-2009?

.....
Perché?

.....
Allora possiamo dire che Francesco è nato un

(attenzione agli anni bisestili!)
E, a questo punto, non avrete nessuna difficoltà a dire in che giorno della settimana Francesco festeggerà il suo ventesimo compleanno:

-
.....
2. Qual è l'ultima cifra di 2009^{2009} ? Difficile?! Provate prima a moltiplicare 2009 per 2009; sapete dire allora qual è l'ultima cifra di 2009^2 ? Potete dirlo anche senza fare tutta la moltiplicazione?

.....
.....
Provate ora a (immaginare di) moltiplicare il risultato ottenuto ancora per 2009; potete ora dire quale è l'ultima cifra di 2009^3 :

.....
E quale è l'ultima cifra di 2009^4 ?

.....
E di 2009^5 ?

.....
Sembra che l'ultima cifra si ripeta in maniera regolare: ma secondo voi si tratta di un caso o di una necessità?

UGUALI o DIVERSI
Avvio all'astrazione

Perché?

E allora cosa possiamo dire sull'ultima cifra di 2009^{2009} ?

E ora vi sfidiamo! Qual è l'ultima cifra di 1953467^{2636} ?

Come avete trovato questa soluzione?